

1903.

N. 1.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. FOGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 10. HEFT 1.

DES GANZEN REIHE 315. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1903.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 38 M.*

*(Ausgegeben am 30. December 1902.)*

# I n h a l t.

	Seite
1. H. Siedentopf und R. Zsigmondy. Über Sichtbarmachung und Grössenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen, mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser . . . . .	1
2. L. Zehnder. Ein Volumometer für kleine Substanzmengen . . . . .	40
3. H. Ebert und P. Ewers. Das Entwicklungsgesetz des Hittorfschen Kathodendunkelraumes . . . . .	72
4. Max Abraham. Prinzipien der Dynamik des Elektrons . . . . .	105
5. E. Warburg. Über leuchtenden elektrischen Wind . . . . .	180
6. Gilbert T. Walker. Die optischen Eigenschaften dünner Metallplatten . . . . .	189
7. Th. Sundorph. Über die Bildung leitender Brücken an der Stelle, wo ein Strom von geringer Spannung unterbrochen wird . . . . .	198
8. Mathias Cantor. Über die Grundlage der Lösungstheorie . . . . .	205
9. Mathias Cantor. Über den Einfluß elektrischer Felder auf die Funkenentladung und die Zerstreuung von Elektrizität . . . . .	214
10. Wilhelm Volkmann. Nebenschlußkasten zum Drehspulgalvanometer . . . . .	217
11. Fr. Klingelfuß. Über einen Blitzwirbel, beobachtet am 15. Juli 1902 über Basel . . . . .	222

Manuskripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Glessen, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rückendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.







ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 10.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS

1891

# ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 10.

DER GANZEN REIHE 815. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1903.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

ANNALS

OF

PHYSICS

AND

THE HISTORY OF THE EARTH

AND

THE

HEAVENS

AND

THE HISTORY OF THE EARTH

AND

THE

HEAVENS

AND

THE

HEAVENS

PHYSICS

AND



THE

LIBRARY OF THE

1900



## Inhalt.

### Vierte Folge. Band 10.

#### Erstes Heft.

Seite

1. H. Siedentopf und R. Zsigmondy. Über Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen, mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser . . . . . 1
2. L. Zehnder. Ein Volumometer für kleine Substanzmengen . . . 40
3. H. Ebert und P. Ewers. Das Entwicklungsgesetz des Hittorfschen Kathodendunkelraumes . . . . . 72
4. Max Abraham. Prinzipien der Dynamik des Elektrons . . . 105
5. E. Warburg. Über leuchtenden elektrischen Wind . . . . 180
6. Gilbert T. Walker. Die optischen Eigenschaften dünner Metallplatten . . . . . 189
7. Th. Sundorph. Über die Bildung leitender Brücken an der Stelle, wo ein Strom von geringer Spannung unterbrochen wird . . 198
8. Mathias Cantor. Über die Grundlage der Lösungstheorie . . 205
9. Mathias Cantor. Über den Einfluß elektrischer Felder auf die Funkenentladung und die Zerstreuung von Elektrizität . . 214
10. Wilhelm Volkmann. Nebenschlußkasten zum Drehspulgalvanometer . . . . . 217
11. Fr. Klingelfuss. Über einen Blitzwirbel, beobachtet am 15. Juli 1902 über Basel . . . . . 222

*Ausgegeben am 30. Dezember 1902.*

#### Zweites Heft.

1. L. Holborn und F. Kurlbaum. Über ein optisches Pyrometer . . . . . 225
2. Franz Lindig. Über den Einfluß der Phasen auf die Klangfarbe . . . . . 242

	Seite
3. O. Grotrian. Die Unipolarmaschine ohne Eisen . . . . .	270
4. F. Kohlrausch und L. Holborn. Über ein störungsfreies Torsionsmagnetometer . . . . .	287
5. H. Haga und C. H. Wind. Die Beugung der Röntgenstrahlen . . . . .	305
6. Wilhelm Donle. Eine selbsttätige Sprengelsche Queck- silberluftpumpe, zugleich Erwiderung an Hrn. Kahlbaum . . . . .	313
7. Ferdinand Braun. Einige Versuche über Magnetisierung durch schnelle Schwingungen . . . . .	326
8. Max Reinganum. Über Molekularkräfte und elektrische La- dungen der Moleküle . . . . .	334
9. Max Reinganum. Zum Mechanismus elektrochemischer Vor- gänge . . . . .	354
10. D. Konowalow. Das kritische Gebiet der Lösungen und die Erscheinungen der Opaleszenz . . . . .	360
11. B. Walter. Über die Entstehungsweise des Blitzes . . . . .	393
12. Heinrich Maché. Zur Physik der Flamme . . . . .	408
13. Zemplén Győző. Über den Energieumsatz in der Mechanik . . . . .	419
14. Robert Geigel. Über Absorption von Gravitationsenergie durch radioaktive Substanz . . . . .	429
15. Max Planck. Über die Grundlage der Lösungstheorie; eine Erwiderung . . . . .	436
16. L. Holborn und F. Henning. Über die Ausdehnung des geschmolzenen Quarzes . . . . .	446
17. A. Schmidt. Der Energieinhalt einer unendlich hohen Luft- säule bei konstantem Werte von $g$ und $T$ . . . . .	449
18. G. Quincke. Die Messungen des Hrn. Gallenkamp mit Adhäsionsplatten . . . . .	453
Berichtigung . . . . .	456

*Ausgegeben am 27. Januar 1903.*

### Drittes Heft.

1. O. Lummer und E. Gehrecke. Über die Anwendung der Interferenzen an planparallelen Platten zur Analyse feinsten Spektrallinien . . . . .	457
2. G. Quincke. Die Oberflächenspannung an der Grenze wässe- riger Kolloidlösungen von verschiedener Konzentration . . . . .	478

	Seite
3. G. Holtmark. Eine Methode für die Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen nebst einer Berechnung der Wellenlänge derselben . . . . .	522
4. A. Wehnelt. Potentialverteilung im dunklen Kathodenraume	542
5. Ralph Smith Minor. Dispersion einiger Metalle, besonders für ultraviolette Strahlung . . . . .	581
6. L. Zehnder. Über eine automatische Quecksilberstrahlpumpe, nebst einigen glastechnischen Einzelheiten . . . . .	623
7. N. Werigin, J. Lewkojeff und G. Tammann. Über die Ausflußgeschwindigkeit einiger Metalle . . . . .	647
8. C. Runge und J. Precht. Über das Bunsenflammenspektrum des Radium . . . . .	655
9. August Schmauss. Notiz zur magnetischen Doppelbrechung	658
10. A. Slaby. Antwort an Hrn. Braun . . . . .	661
11. Ferdinand Braun. Erklärung auf Hrn. Slabys Antwort .	665

*Ausgegeben am 26. Februar 1903.*

**Viertes Heft.**

1. G. Quincke. Die Oberflächenspannung an der Grenze wässriger Kolloidlösungen von verschiedener Konzentration . . .	673
2. G. C. Schmidt. Über die Emanation des Phosphors . . .	704
3. Max Toepler. Über Funkenlängen und Anfangsspannungen in Luft von Atmosphärendruck . . . . .	730
4. Karl Tangl. Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten mit der Temperatur . . . . .	748
5. K. Olszewski. Apparate zur Verflüssigung von Luft und Wasserstoff . . . . .	768
6. A. Brandt. Über die Beziehung zwischen der Formel von J. Stefan für den Kohäsionsdruck einer Flüssigkeit und der Zustandsgleichung von van der Waals . . . . .	783
7. Karl Langenbach. Über Intensitätsverteilung in Linienspektren . . . . .	789
8. F. Harms. Elektrometerkapazitäten und die Verwendung von Elektrometern zur Messung von Elektrizitätsmengen . . . .	816
9. J. Giesen. Einige Versuche mit der Salvionischen Mikrowage . . . . .	830
10. J. Zenneck. Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern . . . . .	846

	Seite
11. August Schmauss. Magnetische Drehung der Polarisations- ebene des Lichtes in selektiv absorbierenden Medien . . . . .	853
12. F. Richarz. Temperaturdifferenzen in künstlich erzeugten auf- und absteigenden Luftströmen nach Messungen von Hrn. S. Löwenherz . . . . .	863
13. R. v. Sahmen und G. Tammann. Über das Auffinden von Umwandlungspunkten mit einem selbstregistrierenden Dilato- graphen . . . . .	879
14. Ad. Schmidt. Werte der erdmagnetischen Elemente zu Pots- dam für das Jahr 1901 . . . . .	890
15. W. Kaufmann. Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. R. Geigel: „Über die Absorption von Gravitationsenergie durch radioaktive Substanz . . . . .	894

*Ausgegeben am 13. März 1903.*

## Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. Klingelfuss, Figg. 1 u. 2.  
„ II. Walter, Figg. 1—4.

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 10.

**1. *Über Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikroskopischer<sup>1)</sup> Teilchen, mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser; von H. Siedentopf und R. Zsigmondy.***

### Einleitung.

Eine uns vorliegende Serie von goldhaltigen Gläsern, in welchen das Gold in den verschiedensten, färbenden Zuständen (blau, violett, rot in verschiedenen Nuancen), sowie auch in größerer, nicht mehr färbender, aber trübender Zerteilung enthalten war, gab uns die Veranlassung zu einer ausführlichen optischen Untersuchung, über die wir im folgenden berichten.

Es hat bisher niemand über die Grösse oder über andere Eigenschaften der in den Rubingläsern enthaltenen einzelnen kleinen Goldteilchen etwas Bestimmtes aussagen können; man gab nur an, daß sie mikroskopisch nicht mehr sichtbar seien, ihre Größe unter der einer halben Lichtwelle liegen müsse. Die oben erwähnte Serie von Goldgläsern lud dazu ein, die betreffenden Fragen näher zu studieren. Wir stellten uns dabei zunächst die Aufgabe, eine Methode auszuarbeiten, welche es gestattete, die Goldteilchen selbst — soweit als möglich — der direkten Beobachtung zugänglich zu machen.

Es sei hier gleich vorweg bemerkt, daß wir nach 1 $\frac{1}{2}$  jährigen Verbesserungen diese im folgenden näher erörterte Methode soweit durchgebildet haben, daß wir glauben, nicht mehr weit von der Grenze des Erreichbaren entfernt zu

1) Da wir in dieser Abhandlung sehr oft von Teilchen, deren Dimensionen unter der Auflösbarkeitsgrenze für mikroskopische Beobachtung im Abbe-Helmholtz'schen Sinne liegen, zu reden haben, sei uns gestattet, dieselben zur Abkürzung als ultramikroskopische zu bezeichnen.

sein. Es gelang mit ihrer Hilfe Goldteilchen, deren Größen nicht weit von den molekularen Dimensionen entfernt sind, einzeln sichtbar zu machen. Wir heben weiter hervor, daß unsere Methode einer allgemeineren Anwendung fähig ist und daß wir selbst bereits die Untersuchung mit einigem Erfolg auf das Studium kolloidaler Lösungen und trüber Medien ausgedehnt haben. Da aber derartige Untersuchungen mehr chemisches oder medizinisches Interesse haben, so müssen wir hier uns darauf beschränken, zunächst die optischen Bedingungen der Methode zu erörtern und sie selbst zu beschreiben. Dies bildet den Inhalt des ersten<sup>1)</sup> Abschnittes der nachfolgenden Darstellung. Darauf geben wir in einem zweiten<sup>2)</sup> Abschnitt einen Versuch zur Bestimmung der Größenordnung der beobachteten ultramikroskopischen Teilchen und in einem dritten<sup>3)</sup> eine Zusammenstellung der hiernach gemachten Beobachtungen an goldhaltigen Gläsern.

#### I. Über eine Methode zur Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen.

Die gefärbten Rubingläser, die den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildeten, ließen nach den gewöhnlichen mikroskopischen Methoden, selbst mit Dunkelfeldbeleuchtung untersucht, keine Spur einer Trübung erkennen, sondern erschienen homogen. Man hätte bei ihnen eine Andeutung einer Heterogenität erwarten dürfen, da sich die Goldgläser in Dünnschliffen wie gefärbte Bakterienpräparate verhalten sollten. Freilich konnte danach die ganze Aufgabe als aussichtslos erscheinen, besonders wenn man noch in Rücksicht zieht, daß die Größe der sichtbar zu machenden Teilchen vermutlich nicht unerheblich unter derjenigen liegen würde, die noch dem Auflösungsvermögen der besten Mikroskope zugänglich ist. Eine einfache Überlegung, die auch durch bereits vorliegende Beobachtungen gestützt wird, läßt aber erkennen, daß die Aufgabe dennoch lösbar sein kann. Denken wir uns in beliebiger Verteilung selbstleuchtende Teilchen von sehr hohem spezifischen Strahlungsvermögen in mittleren Abständen, die mikroskopisch noch

1) Verf. H. Siedentopf.

2) Verf. R. Zsigmondy.



auflösbar sind, so werden wir die von ihnen im Mikroskope erzeugten Beugungsscheibchen offenbar einzeln noch wahrnehmen können, wenn auch die Teilchen weit kleiner sind, als etwa eine halbe Wellenlänge sichtbaren Lichtes. Es muß nur das Produkt aus spezifischer Intensität in die Fläche der leuchtenden Teilchen und dem Quadrat des Sinus des wirkamen Leuchtwinkels grösser sein als die untere Grenze für die Lichtempfindlichkeit des Auges. Die Abbildung selbst unterliegt den gleichen Bedingungen, wie die von Sternen durch das Teleskop. Von vorliegenden Beobachtungen ist hier heran zu ziehen die Sichtbarmachung von hell erleuchteten äußerst schmalen Spalten, die auf versilberten Glasflächen erzeugt werden können, deren Spaltbreite auf etwa  $0,1\mu$  und weniger geschätzt wurde.<sup>1)</sup>

Hieraus dürfte zur Genüge erhellen, daß eine Grenze für die *Sichtbarmachung unter Verzichtleistung auf ähnliche Abbildung* bei weit kleineren Größenordnungen zu suchen sein wird als die von Abbe und Helmholtz festgesetzte Grenze für die ähnliche *Abbildung*. Aus diesen Bemerkungen ergeben sich die Anforderungen, denen bei der Sichtbarmachung kleinster Teilchen zu genügen ist. Da im allgemeinen die optisch nachzuweisenden Teilchen nicht oder doch nicht mit genügender spezifischer Intensität selbstbeleuchtend werden, so ist man von vornherein auf künstliche Beleuchtung angewiesen und zwar vermittelt spezifisch heller Lichtquellen, wie Bogenlicht oder Sonnenlicht. Die beleuchteten Teilchen üben infolge ihrer Kleinheit keinen nennenswerten Einfluß aus auf die Phase der beleuchtenden Strahlen, sodaß sie durch den von ihnen abgelenkten Strahlenkegel in Bezug hierauf wie selbstleuchtende Teilchen wirken. In Bezug auf Größe und Richtung der Amplitude in den Strahlen des Beugungskegels liegen nach Rayleigh's Untersuchungen die Verhältnisse anders. Die Grösse derselben nimmt bei den gebeugten Strahlen, die in der Richtung der beleuchtenden Strahlen liegen, den doppelten Wert an gegenüber denen, die in einer dazu senkrechten Ebene verlaufen, und die Richtung der

1) H. Fizeau, Pogg. Ann. 116. p. 458. 1852; H. Ambronn, Wied. Ann. 48. p. 217—222. 1893.

Amplitude der gebeugten Strahlen bestimmt sich in einfacher Weise aus der Beugungsebene.

Die Intensität der beleuchtenden Strahlen ist nun im allgemeinen merklich höher als die der abgebeugten. Um daher kleinere Teilchen durch ihre Beugungskegel sichtbar zu machen, ist es ein *Haupterfordernis, die Beleuchtung so anzuordnen, dass in dem zur Sichtbarmachung verwendeten Beugungskegel keiner der beleuchtenden Strahlen enthalten ist*. Eine solche Anordnung würde im Prinzip auf eine sogenannte Dunkelfeldbeleuchtung hinauskommen. Nun läßt aber das übliche Arrangement einer solchen<sup>1)</sup> bei Anwendung von Bogen- und Sonnenlicht eine solche Unzahl von Reflexen an den zahlreichen Linsenflächen des Kondensors und des Mikroskopobjektives entstehen, daß dadurch das Prinzip einer Dunkelfeldbeleuchtung praktisch illusorisch wird.

Trifft man jedoch die Einrichtung so, daß die Achse des Beleuchtungskegels senkrecht steht auf der Achse des für die Sichtbarmachung zur Geltung kommenden Beugungskegels und sind die beiden Kegel weiterhin so dimensioniert, daß sie sich nicht durchdringen, so bleiben die im Kondensor entstehenden Reflexbilder unschädlich für das dazu senkrechte Beobachtungsobjektiv am Mikroskop und es

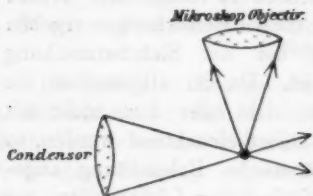


Fig. 1.

ist vor allem unmöglich, daß einer der beleuchtenden Strahlen in letzteres direkt eindringen kann (vgl. Fig. 1). Hiernach stellt sich die im folgenden noch eingehender zu besprechende Methode dar als eine Weiterbildung der sogenannten Dunkelfeldbeleuchtung; sie ermöglicht insbesondere die Anwendung der hellsten Lichtquellen zur Beleuchtung.

Man kann sich zur Charakterisierung dieses Verfahrens auch noch auf einen anderen Standpunkt stellen. Bekanntlich werden Staubteilchen, die in einem abgeschlossenen Raum frei in der Luft schweben, sofort sichtbar, sowie ein Bündel Sonnenstrahlen durch einen Spalt hindurch in das dunkle

1) W. Gebhardt, Zeitschr. f. wiss. Mikrosk. 15. p. 289—299. 1896.

Zimmer dringt und das beobachtende Auge in einer zu den Sonnenstrahlen annähernd senkrechten Ebene auf die dadurch erhellten Teilchen schaut. Verstärkt man Beleuchtung und Beobachtung durch Anwendung eines Kondensors<sup>1)</sup> 2) und eines Mikroskopsystems<sup>3)</sup> in der in Fig. 1 dargestellten Anordnung, so hat man im Prinzip ebenfalls unsere Methode skizziert.

Die Apertur der anzuwendenden Kondensor- und Mikroskopsysteme hat nun außer den oben genannten noch weiteren Bedingungen zu genügen. Wenn man auch theoretisch den Maximaleffekt erreichen würde, indem man beiden die gleiche Öffnung von  $n \sin 45^\circ$  erteilte, so ist es aus zwei Gründen doch vorteilhaft, hiervon abzuweichen. Einmal stehen sich die beiden Objektive bei der orthogonalen Anordnung sehr leicht im Wege und dann wird man praktisch großen Wert darauf legen, daß das der Beobachtung dienende zum Zwecke der Auflösung feinerer Zerteilungen ein möglichst hohes Auflösungsvermögen besitzt. Infolgedessen erschien es am vorteilhaftesten, als Kondensor ein Mikroskopsystem *AA* von der numerischen Apertur 0,30 von C. Zeiß, Jena, zu verwenden, dessen Öffnung als Beleuchtungssystem immerhin nicht unbeträchtlich ist, das vor allem aber einen so großen Objekt- abstand (ca. 1 cm) besitzt, daß als Beobachtungssysteme schwächere wie stärkere Mikroskopsysteme bis zur homogenen Immersion benutzt werden können. Außerdem empfiehlt es sich durch seine erheblich bessere Strahlenvereinigung vor gewöhnlichen Kondensorsystemen.

Von ausschlaggebender Bedeutung ist nun die Regulierung des Strahlenganges zur Beleuchtung. Es hätte gar keinen Zweck, das verkleinerte Bild der Lichtquelle, welches von dem Beleuchtungssystem *AA* entworfen wird, größer zu machen, als das sehr kleine, wahre Gesichtsfeld des zur Beobachtung dienenden Mikroskopsystems verlangt. Es ist sogar außerordentlich vorteilhaft, dieses Bild noch erheblich kleiner zu machen, besonders nach der Tiefe. Denn das Beobachtungssystem hat eine so geringe Tiefe, daß sehr viele Teilchen

1) M. Faraday, Phil. Trans. Roy. Soc. London. 147. p. 145—181. 1857.

2) J. Tyndall, Proc. Roy. Soc. London. 17. p. 223—233. 1869.

3) G. Quineke, Pogg. Ann. 113. p. 568. 1861.

außerhalb der Einstellungsschicht erleuchtet und nun so große, helle und sich überlagernde Zerstreuungskreise in der Bildebene geben würden, daß der dadurch entstehende Schleier die aus der Einstellungsschicht abgebildeten Beugungsscheibchen überstrahlen würde. Infolgedessen ist es am besten, das Bild der Lichtquelle zunächst auf einem Präzisionspalt zu entwerfen, dessen Weite bilateral durch eine Mikrometerschraube mit Rechts- und Linksgewinde auf  $\frac{1}{100}$  mm bequem verstellbar ist. Ebenfalls muß die Höhe des Spaltes durch zwei sorgfältig gearbeitete Backen mikrometrisch verstellbar sein. Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, *in der Einstellungsschicht des Beobachtungssystems einen genau bekannten und meßbar veränderlichen erleuchteten Querschnitt zu erzeugen.* (Dieser Querschnitt betrug in praxi etwa  $1,5-3 \mu$  Tiefe und etwa  $4-6 \mu$  Breite.<sup>1)</sup> Die Spur der beleuchtenden Strahlen war in den Präparaten als ein vor dem Bilde des Spaltes sich verengender und hinter demselben sich erweiternder Lichtkegel deutlich begrenzt erkennbar vgl. Fig. 6 p. 11.)

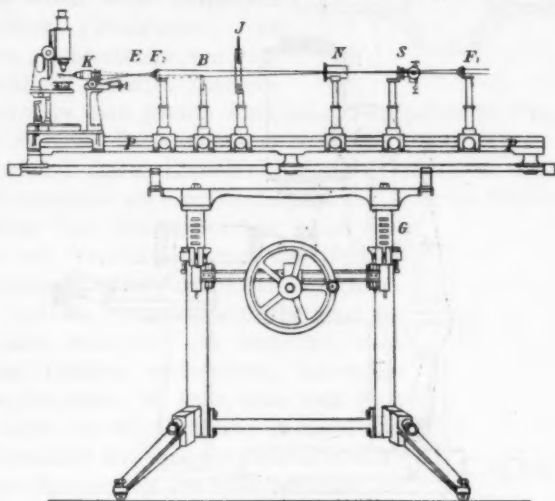
Wir wenden uns jetzt zur speziellen Beschreibung des ganzen Beleuchtungsapparates. Derselbe ist in Fig. 2 in  $\frac{1}{10}$  nat. Größe abgebildet. Die vom Uhrwerkhelio staten reflektierten Sonnenstrahlen treten durch eine Irisblende in den verdunkelten Beobachtungsraum. In demselben befindet sich das hochkurbelbare Gestell *G* einer 1,50 m langen optischen Bank mit Metallprisma *P* von C. Zeiß, Jena.

Auf demselben sind mittels sorgfältig justierter Reiter die einzelnen Teile des Apparates montiert. Die Lichtstrahlen treffen zuerst das Fernrohrobjektiv  $F_1$  von beiläufig 100 mm Brennweite, welches auf dem Präzisionspaltkopf *S*, der dem Mikrospektralobjektiv nach Engelmann<sup>2)</sup> entnommen ist, ein etwa 1 mm großes Bild der Sonne entwirft. Dasselbe wird durch den horizontal liegenden Bilateralspalt je nach Bedarf auf 5—50 Hundertel Millimeter abgeblendet. Die Spaltweite ist auf der mit der Schraube verbundenen Trommel an einem Index

1) Bei größeren Zerteilungen wurde 2—4 Hundertel Millimeter Tiefe und 4—8 Hundertel Millimeter Breite angewendet.

2) Th. W. Engelmann, Zeitschr. f. wissensch. Mikrosk. 5. p. 289. 1888; H. Siedentopf, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 32. p. 717. 1902.

ablesbar. Die die Höhe des Spaltes begrenzenden Backen sind horizontal beweglich und auf  $\frac{1}{10}$ —2 mm Abstand eingestellt. Hinter dem Spalt ist nach Bedarf ein Polarisator  $N$  aufstellbar. Die Irisblende  $J$  hält etwa durch Reflex an den Spaltseiten auftretendes Seitenlicht ab. Die stemmeisenförmige Blende  $B$  gestattet eine Hälfte des Strahlenkegels abzublenden; es wird dies nötig, wenn Immersionsobjektive benutzt werden, um zu verhindern, daß infolge des kurzen Objektivaabstandes derselben schädliche Reflexe an der Fassung der Frontlinse



Maßstab 1 : 20.

Fig. 2.

auftreten. Ein zweites Fernrohrobjektiv  $F_2$  von 80 mm Brennweite bildet den Spalt in der Bildebene  $E$  des Kondensors  $C$  in etwa 4 facher Verkleinerung reell ab. Dieses Bild  $E$  wird durch das als Kondensor benutzte Mikroskopobjektiv  $AA$  in etwa 9 facher Verkleinerung im Präparat abgebildet. Man überzeugt sich davon, daß die Apertur des Kondensorsystems  $C$  voll ausgenutzt wird, indem man kontrolliert, ob die hintere Brennebene voll beleuchtet ist. Es fällt die obere Hälfte der aus dem Objektiv  $AA$  tretenden Strahlen weg, wenn das durch das Fernrohrobjektiv  $F_2$  in der hinteren Brennebene

von *AA* entworfene Bild der Halbblende *B* die obere Hälfte dieser Brennebene verdunkelt. Durch zwei in horizontaler Ebene senkrecht zueinander wirkende Mikrometerschrauben läßt sich das Kondensorobjektiv bequem gegen die optische Achse des eigentlichen Mikroskopes zentrieren.

Am Mikroskope sind Einrichtungen nötig, welche gestatten die zu untersuchende Stelle der Präparate in die Achse

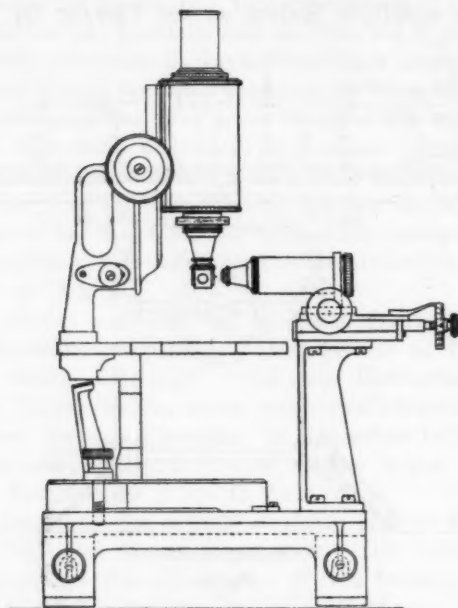


Fig. 3.

des Beleuchtungskegels zu bringen. Zu diesem Zwecke ist für Untersuchung fester Präparate auf dem großen Kreuztisch des Statives *I<sup>c</sup>* von C. Zeiß, Jena, ein etwa 2 cm hohes Metallprisma mit Führungsschlitten für mikrometrische Vertikalbewegung einer 2 × 4 cm großen Tischplatte angebracht. Zur Untersuchung von Flüssigkeiten dient ein Spezialbehälter (Fig. 4) mit Spülvorrichtung, der sich direkt unter die zur Untersuchung dienenden Immersionsobjektive (Fig. 3) schrauben läßt.



Die Frontlinse ist dabei direkt mit der zu untersuchenden Flüssigkeit innerhalb des Kästchens in Berührung. Um das Anschrauben am Objektiv zu ermöglichen, ist letzteres mit einem ein Außengewinde tragenden kleinen Zwischenringe versehen. An der dem Kondensor zugekehrten Vorderfläche befindet sich ein Fenster aus geschmolzenem Quarz, um die beleuchtenden Strahlen eintreten zu lassen.

Es empfiehlt sich Quarz durch seine Indifferenz gegenüber Flüssigkeiten. In seinem geschmolzenen, von Doppelbrechung befreiten Zustande

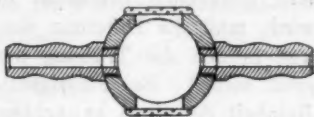


Fig. 4.

gestattet er eine scharfe Abbildung des Spaltes im Präparat, ohne störende Polarisationserscheinungen zu bewirken. Man umgeht bei dieser Einrichtung des angeschraubten Behälters das Fokussieren auf eine Objektebene und kann die Mikrometerschraube des Mikroskoptubus ohne weiteres zur Vertikalbewegung des Gefäßes benutzen, um auf die Achse der beleuchtenden Strahlen einzustellen. Will man die mit dem Ausspülen des immerhin nicht kleinen Gefäßes verbundenen Schwierigkeiten umgehen, so kann man sich statt des direkt an die Objektive geschraubten Metallgefäßes mit Quarzfenstern auch einer kleinen Einrichtung aus Glas bedienen, die in Fig. 5 dargestellt ist. Sie gestattet in kürzester Frist eine Reihe von Flüssigkeiten in bequemer Weise der Untersuchung zu unterwerfen.

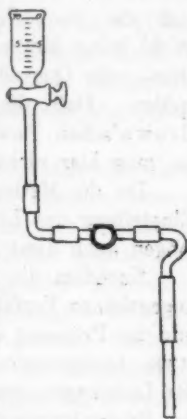


Fig. 5.

Die zu untersuchenden Präparate haben nun ebenfalls eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen, ehe sie mit Erfolg der Beobachtung unterworfen werden können. Handelt es sich um Glasstücke, in denen feine Trübungen nachgewiesen werden sollen, so sind sie zunächst in parallelepipedische Form zu bringen. Die etwa 1—2 mm hohe Stirnfläche derselben, durch welche der Beleuchtungskegel eindringt, muß sorgfältige Objektivpolitur nach Probeglas aufweisen, da sonst die Ab-

bildung des Spaltes notleidet und infolgedessen aberrierende Strahlen Blendungserscheinungen hervorrufen. Sollen die einzelnen Teilchen wahrnehmbar werden, so muß ihr mittlerer Abstand gleich oder größer sein als das Auflösungsvermögen des Beobachtungssystems. Bei Flüssigkeiten ist dies durch Konzentrationsänderungen leicht zu erzielen. Damit endlich eine genügende Intensität der gebeugten Strahlen erhalten wird, muß die Differenz der Lichtgeschwindigkeiten im Glas und in den die Trübung hervorrufenden Teilchen genügend groß sein.<sup>1)</sup> Bei Flüssigkeiten hat man besonders auf die Reinheit derselben zu achten. Größere suspendierte Fremtteilchen von etwa  $0,5 \mu$  Durchmesser und mehr erkennt man freilich sofort an ihrem blendenden Glanze. Handelt es sich aber um verschiedene Lösungen, die abgestufte Teilchengrößen derselben Substanz enthalten wie z. B. kolloidale Goldlösungen, so setzt es erst einige Uebung voraus, um schnell und sicher die Arten zu unterscheiden, und setzt des weiteren voraus, daß die Beobachtungsgefäße genügend ausgespült werden. Wohl keine Methode lehrt mehr, wie schwer es ist, die an den Glas- oder Quarzflächen haftenden Oberflächenschichten abzuspolen. Daß die Methode zum Studium der sogenannten Brown'schen Bewegung in Flüssigkeiten besonders geeignet ist, mag hier nicht unerwähnt bleiben.

Da die Methode einige besondere Manipulationen in der Einstellung des Lichtkegels und des Mikroskopes verlangt, so mögen auch diese hier kurz mitgeteilt werden.

Nachdem die Beleuchtung nach dem weiter oben bereits angegebenen Verfahren im allgemeinen reguliert und das Spaltbild im Präparat entworfen ist, beobachtet man zunächst bei etwas hochgezogenem Tubus ohne Okular, ob sich das Bild des Lichtkegels genau zentrisch über der hinteren Brennebene des Beobachtungsobjektives befindet. Abweichungen hiervon sind durch Verstellungen an den beiden Mikrometerschrauben, mit denen der Kondensor bewegt wird, zu kompensieren. Hierauf senkt man mit der Mikrometerschraube den Tubus

1) Bei fluoreszierenden Substanzen kann sich zu dem Beugungskegel noch ein Fluoreszenzkegel addieren, der aber mittels eines Analysators leicht von ersterem unterscheidbar ist.

langsam abwärts, bis die hintere Linse des Mikroskopobjektives mit Licht voll und gleichmäßig ausgefüllt ist. Hierauf setzt man das Okular auf und findet jetzt sofort oder eventuell nach äußerst geringer Fokussierung die Einstellung. Bei Anwendung von Glaspräparaten und von stärkeren insbesondere von Immersionsobjektiven hat man übrigens noch darauf zu achten, daß das Bild des Spaltes im Präparat im annähernd richtigen Abstand von der Oberfläche entworfen wird.

Das der Okularbeobachtung entsprechende Bild hat ein Aussehen, wie in Fig. 6 dargestellt.

Innerhalb der kreisrunden Okularblende erscheint der )( förmige Lichtkegel. Der Zone engster Einschnürung entspricht das Bild des Spaltes und zwar entspricht die Breite des Kegels der Spalthöhe, seine Tiefe, die nur durch Höher- oder Tieferfokussieren mittelbar erkennbar wird, der Spaltbreite; die Zone engster Einschnürung besitzt eine gewisse Länge infolge der unvermeidlichen Bildtiefe des Kondensorobjektives (Mikroskopsystem *AA*).

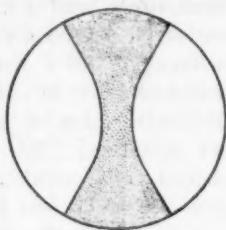


Fig. 6.

Innerhalb des Kegels erblickt man die Beugungsscheibchen, welche von den schwebenden oder bewegten Teilchen erzeugt werden. Die Größe, Farbe und Intensität der Scheibchen hängt sehr von den Präparaten ab. Die Größe speziell auch von der Apertur des zur Anwendung gelangenden Mikroskopobjektives und der Wellenlänge des im gebeugten Strahlenkegel wirksamen Lichtes. Sie sind an der gleichen Stelle im Präparat um so kleiner, je höher die Apertur des Beobachtungssystems und je kurzwelliger die betreffende Farbe ist, in welcher die Teilchen erscheinen. Der Polarisationszustand ist bei Anwendung eines Polarisators und stärkerer Systeme innerhalb der einzelnen Beugungsscheibchen, wie in der ganzen hinteren Brennebene des Mikroskopobjektives in den nachstehenden Figuren 7—10 erläutert. Bei demselben bezeichnet *PE* die Polarisationsebene des Polarisators, *EE* die Ebene, welche die Achsen des wirksamen Beleuchtungs- und Beugungskegels enthält (Hauptbeugungsebene). Die Strichelung in den großen

Kreisen gibt die Richtung der Polarisations Ebene in der hinteren Brennebene des Mikroskopobjektives. Das darunter gezeichnete Scheibchen stellt schematisch das Aussehen des entsprechenden Beugungsscheibchens dar. Vorausgesetzt sind hierbei Teilchen,

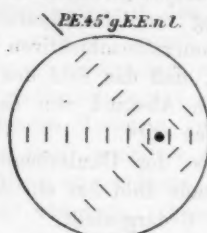
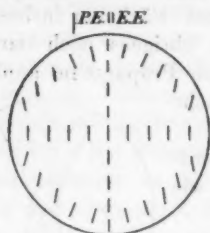


Fig. 7.



Fig. 8.

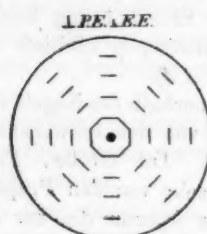


Fig. 9.



Fig. 10.

die erheblich kleiner als ca.  $0,1 \mu$  sind. Die Figuren lassen erkennen, was bei Anwendung eines Analysators zu erwarten ist. Erwähnt sei hier nur die bemerkenswerte Spaltung der runden Beugungsscheibchen durch einen in der Hauptbeugungsebene liegenden dunklen Balken in zwei längliche Scheibchen,

wenn die Polarisationssebene des einfallenden Lichtes parallel der Achse der beleuchtenden Strahlen und senkrecht zur Hauptbeugungsebene (Fig. 10) und die Polarisationssebene des Analysators parallel der Hauptbeugungsebene liegt.

Es sei hier noch einer eigentümlichen Veränderung der Beugungsscheibchen gedacht, die solche Goldteilchen hervorrufen, welche nicht bedeutend kleiner sind als die mittlere Wellenlänge sichtbaren Lichtes, etwa  $0,1 \mu$  oder etwas mehr mittleren Durchmesser besitzen. Diese Scheibchen erscheinen bei stärkerer Vergrößerung stets doppelt. Ein grüngelbes Scheibchen ist begleitet von einem rötlichen, in seiner unmittelbaren Nähe. Ihre relative Anordnung ist im ganzen Gesichtsfelde die gleiche, was darauf schließen läßt, daß diese Erscheinung beugungstheoretisch unter Einführung einer kleinen Phasenverzögerung erklärt werden muß und nicht in einer besonderen Anordnung von Doppelteilchen ihren Grund hat. Das rote Scheibchen entspricht dabei stets der geringeren Ablenkung, wie auch nachstehende Fig. 11 verdeutlicht.

Eine Unterschiedlichkeit zeigen alle Beugungsscheibchen der größeren Goldteilchen bei extra- und bei intrafokaler Einstellung, welche in der durch die benutzten Mikroskopobjektive erzeugten Strahlenvereinigung ihren Grund haben muß. Geht man von der scharfen Einstellung durch Hörschrauben zur extrafokalen Einstellung über, so werden die Beugungsscheibchen matter und verschwinden schließlich ganz. Dagegen entstehen bei der intrafokalen (zu tiefen) Einstellung eine große Anzahl (bis zu 20 und mehr) farbige (bei Goldteilchen goldig violetter) Interferenzringe, welche gelegentlich, obgleich von einem einzigen vielleicht nur  $0,1 \mu$  großen Teilchen herrührend, das ganze Okular Gesichtsfeld bedecken können.

Die Beobachtung dieser Erscheinungen ist etwas schwierig und nur bei hohen Okularvergrößerungen möglich. Man kann mit denselben über die förderliche Vergrößerung hinausgehen, um die einzelnen Beugungsscheibchen bequemer gesondert betrachten zu können. Die erreichbare Totalvergrößerung bezogen auf mittlere deutliche Sehweite kann dabei enorm

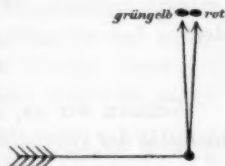


Fig. 11.

hohe Werte erreichen. Bei Anwendung von homogener Immersion „ $^{1/12}$ “ und Kompensationsokular von C. Zeiß, Jena, 18 haben die Beugungsscheibchen der Goldteilchen in Rubingläsern bestimmter Art eine scheinbare Größe von fast 1 mm, während die wahre mittlere Größe derselben Teilchen etwa  $0,02 \mu$  beträgt. —

Es liegt hier nun nahe, nach der voraussichtlichen Grenze zu fragen, die nach dieser Methode der Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen zu erreichen sein wird. Die Antwort hierauf ist bereits in der zu Anfang dieser Mitteilung aufgestellten Bedingung für die Sichtbarkeit enthalten.

Sei  $ds$  die Fläche des im gebeugten Lichte leuchtenden Teilchens,  $k$  seine spezifische Intensität  $\left(\frac{\text{Hefnerkerzen}}{\text{mm}^2}\right)^{1)}$  und  $a_1$  die Apertur des Kondensators,  $a_2$  die numerische Apertur des Strahlenkegels, mit dem das Leuchten des Teilchens innerhalb eines Mediums vom Brechungsindex  $n$  wirksam gemacht wird. Es sei ferner  $g$  die mittlere Grenze der Lichtempfindlichkeit des Auges, so haben wir als nutzbar zu machende Strahlungsintensität eines gerade noch wahrnehmbaren Teilchens zu setzen:

$$\frac{k \cdot ds \cdot \pi \cdot a_1^2 \cdot a_2^2}{2 n^2} = g,$$

oder

$$ds = \frac{2 g n^2}{\pi k \cdot a_1^2 \cdot a_2^2}.$$

Nehmen wir an, daß im günstigsten Falle die spezifische Intensität der gebeugten Strahlen gleich der der Sonnenstrahlen sei, d. h. ca.  $10^3 \left(\frac{\text{Hefnerkerzen}}{\text{mm}^2}\right)$ , verwenden ein Beleuchtungsobjektiv von der Apertur 0,5 und setzen die Grenze der Lichtempfindlichkeit des Auges zu  $10^{-8}$  Meterkerzen, beobachten mit homogener Immersion von  $a_2 = 1,3$  z. B. Goldteilchen in Rubingläsern vom Brechungsindex 1,5, so giebt

$$ds = 36 \cdot 10^{-12} \text{ mm}^2 = 36 (\mu \mu)^2$$

die kleinste für das Auge praktisch sichtbar zu machende Flächengröße. — Die mit dem im vorstehenden beschriebenen

1) Wir sehen im folgenden ab von der Variation der Intensität der gebeugten Strahlen mit der Neigung  $\varphi$  derselben gegen die beleuchtenden gemäß dem Rayleigh'schen Faktor  $(1 + \cos \varphi)$ , da die angestellte Rechnung der Natur der Sache nach nur approximativen Charakter hat.



Apparate angestellten Beobachtungen scheinen übrigens dieser wenigstens der Größenordnung nach theoretisch bestimmten Grenze für die Sichtbarkeit eines kleinsten Einzelteilchens bereits recht nahe gekommen zu sein.

Hieraus ergibt sich weiter, daß es auch bei intensivster Beleuchtung *nicht gelingen wird*, einzelne räumliche Diskontinuitäten von der Größenordnung, wie sie den mittleren Molekülen beigemessen wird (ca.  $0,6 \mu\mu$ ), für das menschliche Auge direkt sichtbar zu machen. Selbst wenn es gelänge, die Moleküle durch irgend einen Proceß zum intensiven Selbstleuchten zu bringen, so müßte doch die spezifische Intensität der erregten Strahlung erheblich die der Sonnenstrahlung überschreiten, was zu erreichen unwahrscheinlich ist.

Etwas anderes ist es aber mit der Sichtbarmachung des Beugungskegels, der von einer größeren Anzahl solcher Moleküle herrühren könnte, die sich in solch kleinen, mikroskopisch eben nicht mehr auflösbaren Abständen befinden, daß etwa 100 von ihnen auf ein dementsprechendes Flächenelement entfallen. Bei Fluoresceinlösung in Verdünnung 1:100 Millionen war noch ein schwacher Lichtkegel im Mikroskop sichtbar, der höchstwahrscheinlich aus von den Fluoresceinmolekülen (oder deren Bestandteilen) selbst direkt gebeugtem und außerdem durch Fluoreszenz umgewandeltem Lichte bestand.<sup>1)</sup> Derselbe war im reinsten destillierten und mehrmals ausgefrorenen Wasser nicht wahrnehmbar.

Der Sichtbarmachung großer Molecularkomplexe (Eiweiß, Kartoffelstärke etc.) steht nach obigem jedoch kein prinzipielles Bedenken entgegen, wenn nur dafür Sorge getragen werden kann, daß neben der Einhaltung für die mikroskopische Abbildung geeigneter Konzentration die Differenz der Lichtgeschwindigkeiten oder der Färbung im Einbettungsmedium und in den zu untersuchenden Molecularkomplexen genügend groß ist, um eine kräftige Beugungswirkung entstehen zu lassen, wie solches bei den Goldgläsern in enorm hohem Maße der Fall ist.

Auch die Sichtbarmachung von Molekülen fluoreszierender Körper ist nicht ausgeschlossen, wenn man geeignete hoch-

1) Ueber die Intensität des an Molekülen gebeugten Lichtes vgl. die Schätzung von Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 375—384. 1899.

molekulare, sehr kräftig fluoreszierende Präparate zur Verfügung hat und mit intensivem Sonnenlicht<sup>1)</sup> arbeiten kann.

## II. Über eine Methode der Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen.

In dem vorhergehenden Abschnitt ist eine Methode der Sichtbarmachung sehr kleiner Teilchen beschrieben worden.

Die lineare Größe derselben würde nach dem darin Bemerkten zwischen rund 0,006 und  $0,25\mu$  liegen. Die nächste Frage von allgemeinerem Interesse ist nun die, ob sich nicht innerhalb dieses ganz beträchtlichen Intervalles genauere Angaben über die jeweilige Größe der beobachteten Teilchen machen lassen.

Es leuchtet von vornherein ein, daß man aus der Größe der Beugungsscheibchen keinen Rückschluß ziehen kann auf die Größe der Teilchen selbst, auch die Farbe der Teilchen kann im allgemeinen nicht zur Beurteilung ihrer Größe herangezogen werden, wie wir später zeigen werden.

Es mußte vielmehr eine andere Methode ausgearbeitet werden, die wir im folgenden beschreiben wollen.

Wir halten uns dabei wie im vorangehenden Abschnitt an das Beispiel der Goldrubingläser; die speziellen Resultate der Untersuchung an diesen stellen wir im dritten Abschnitt zusammen.

*Methode der Bestimmung der Teilchengrößen.* Es sei  $A$  der Gehalt eines Kubikmillimeters Glas an metallischem Golde in Milligramm ausgedrückt, und  $n$  die Anzahl der Goldteilchen in einem Kubikmillimeter; dann beträgt das durchschnittliche Gewicht eines Teilchens  $A/n$  mg.

Unter der Voraussetzung, daß das spezifische Gewicht  $s$  des feinzerteilten Goldes gleich dem des gewöhnlichen metallischen Goldes 19,3 bis 20,7<sup>2)</sup>, also rund 20 sei, ist das Volumen des Goldteilchens  $V = A/20n$  cmm; wenn das Teilchen als Würfel gedacht wird, so ergibt sich dann die Seitenlänge  $l$  dieses Würfels aus

$$l = \sqrt[3]{\frac{A}{s \cdot n}}.$$

1) Gewisse Beobachtungen sind uns nur an sehr klaren Junitagen bei hohem Stande der Sonne gelungen.

2) Gmelin Kraut, Handbuch d. anorg. Chem. 3. p. 1005. 1875.

Der Gehalt der Goldgläser ist aber bekannt; die Anzahl der Teilchen läßt sich durch Auszählung eines bestimmten Volumens ermitteln und somit sind alle Größen gegeben, welche zur Ermittlung der durchschnittlichen Teilchengröße erforderlich sind.

Dabei ist die Voraussetzung gemacht, daß alles im Glase enthaltene Gold in Form von zählbaren, annähernd gleichgroßen Goldteilchen enthalten ist.<sup>1)</sup>

*Bestimmung der in der Volumeneinheit enthaltenen Teilchenzahl.*  
Bei  $1\ \mu$  mittlerem Teilchenabstand würden im Kubikmillimeter 1 000 000 000 Goldteilchen enthalten sein. In den Gläsern unserer Versuchsserie sind aber die mittleren Abstände teils größer, teils kleiner. Es ergibt sich daraus unmittelbar, dass man zur Auszählung der Teilchen nur sehr kleine Raumteile des Glases verwenden kann und aus der gefundenen Zahl die Teilchenzahl pro Kubikmillimeter berechnen muß.

Die Aufgabe bestand darin, von allen vorhandenen Teilchen nur diejenigen, welche in einem sehr kleinen Glasvolumen enthalten sind, zu erleuchten und zu zählen, sowie auch die Größen dieses Volumens zu bestimmen.

Diese etwas schwierige und mühsame Arbeit wurde erst ermöglicht durch die früher beschriebene Einrichtung, durch die das Bild eines scharf begrenzten Lichtspaltes bestimmter Dimension im Versuchsglase entworfen wird. (Vgl. nachstehende Figg. 12 u. 13.) In denselben bedeuten: *A A* Mikroskopobjektiv (zur Beleuchtung), *B* Versuchsglas, *D* Lichtkegel, *a b* Breite des Lichtkegels an der Stelle stärkster Einschnürung (Bild des Lichtspaltes), *C* Okularmikrometer.

Die Breite und Tiefe des Spaltbildes<sup>2)</sup> ergibt sich aus Betrachtungen der geometrischen Optik; die Breite kann auch direkt am Okularmikrometer abgelesen werden. (Stellung Fig. 1.) Ebenso läßt sich die Tiefe des Spaltbildes direkt bestimmen, wenn man den Lichtspalt um  $90^\circ$  dreht.

Es erübrigt nur noch, einen Teil des Lichtkegels vorne und rückwärts abzugrenzen (durch Drehen des Okularmikro-

1) Diese Voraussetzung ist nicht vollständig erfüllt; den Einfluß dieser Fehlerquelle werden wir später besprechen.

2) Das genügend scharf gegen die Umgebung abgegrenzt ist.

meters in die Stellung Fig. 2) und die in dem erleuchteten und auf die angegebene Weise begrenzten Glasvolumen enthaltenen Goldteilchen zu zählen, um die für die Berechnung nötigen Daten zu erhalten.

Derartige Zählungen müssen natürlich mehrfach an verschiedenen Stellen des Versuchsglases wiederholt werden.

In jenen Fällen, wo die Teilchen so klein sind und so dicht beisammen liegen, daß eine Auflösung durch das Mikro-

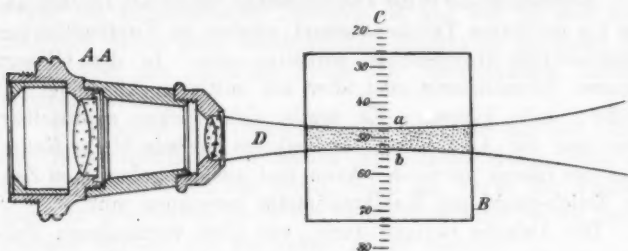


Fig. 12.

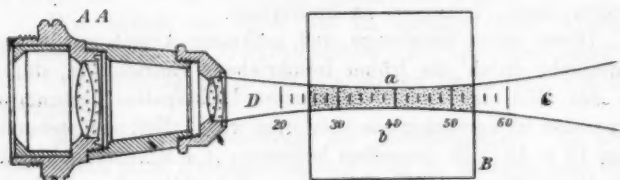


Fig. 13.

skop nicht mehr möglich ist, versagt unsere Methode; sie gibt aber selbst dann noch bei gegebenem Gehalt einen Anhalt über die Größenordnung, in welcher die kleinen, nicht mehr sichtbar zu machenden Teilchen liegen.

*Größenintervall, das durch die neue Beleuchtungsmethode zugänglich gemacht ist.* Durch unsere Methode ist ein ziemlich weiter, bisher wenig zugänglicher Raum der Forschung zugänglich gemacht worden; es handelt sich um Teilchengrößen, die ungefähr zwischen den Grenzen  $6 \times 10^{-6}$  und  $2,5 \times 10^{-4}$  mm oder zwischen  $2,16 \times 10^{-16}$  und  $1,5 \times 10^{-11}$  cmm liegen, also um Teilchen, von denen die größten rund hunderttausendmal mehr Masse besitzen als die kleinsten.

Es würde demnach die bloße Angabe der Größenordnung der Teilchen im Verein mit der Mitteilung der übrigen erkennbaren physikalischen Eigenschaften, welche den betreffenden Teilchen zukommen, schon einen beträchtlichen Gewinn bedeuten. Anscheinend gibt die Methode der Größenbestimmung bedeutend präzisere Werte. Es ist daher von Wichtigkeit, die Fehlerquellen der Methode festzustellen, ehe die Resultate der Untersuchung bekannt gegeben werden.

Vorher seien aber noch einige Bemerkungen über den Goldgehalt der Rubingläser eingefügt. Es sei zunächst einer interessanten Eigentümlichkeit im Verhalten aller Rubingläser gedacht. Frisch geschmolzenes Goldrubinglas ist immer farblos. Wird es aus dem Hafen geschöpft und schnell abgekühlt, so bleibt es farblos. Das farblose Goldrubinglas ist wie schon Spring<sup>1)</sup> erwähnt hat, optisch leer.

Erst Wiedererwärmen zur Rotglut oder langsames Abkühlen bringen die Farbe des Rubinglases<sup>2)</sup> hervor. Dieser Prozeß wird Anlaufen des Glases genannt.<sup>3)</sup>

Gleichzeitig verliert das Glas seine optische Leere und gewinnt die Eigenschaft, bei intensiver Beleuchtung das Licht diffus zu zerstreuen, ein Umstand, der schon Faraday zu dem Urteile führte, daß das Rubinglas seine Farbe dem darin enthaltenen fein zerteilten metallischen Golde verdanke.

Die Richtigkeit dieser Anschauung vorausgesetzt<sup>4)</sup>, gibt der auch von Faraday angewandte kolorimetrische Vergleich ein einfaches Mittel an die Hand, die Menge des in färbendem und somit auch diffus zerstreuendem Zustande vorhandenen Goldes zu bestimmen.

Es ist nur erforderlich, ein Vergleichsobjekt zu besitzen, bei welchem der Gehalt an färbendem, metallischem Golde in

1) W. Spring, Bulletin. de l'Acad. Roy. de Belg. Nr. 12. p. 1019—1027. 1900.

2) Manchmal wird das Glas nicht rot, sondern violett oder blau, auch scheidet sich das Gold häufig als Trübung aus (lebriges Goldglas).

3) Wenn die Schmelze gut gelingt und das Glas rasch verarbeitet wird, so läuft bei vollkommen gleichbleibender Arbeit ein Stück wie das andere in gleicher Farbe an, ein Beweis für die gleichmäßige Verteilung des Goldes im Glashafen.

4) Wir behalten uns vor, hierauf eingehender zurückzukommen. Unsere Versuche haben dieselbe im allgemeinen bestätigt.

demselben Zustande wie in den Rubingläsern enthalten und genau bekannt ist. Ein solches Vergleichsobjekt bieten die kolloidalen Goldlösungen.<sup>1)</sup>

Bei diesen Flüssigkeiten zeigen sich alle charakteristischen Merkmale des Goldrubinglases (Farbe, Absorptionsspektrum, optisches Verhalten des Lichtkegels etc.) mit derartiger Übereinstimmung, daß an einer Identität der Zustände des färbenden Goldes in beiden Fällen kaum gezweifelt werden kann.

Der Prozentgehalt an färbendem Golde ist aber in der Flüssigkeit mit Leichtigkeit durch Analyse zu bestimmen. Die kolorimetrische Bestimmung des Goldes in den Rubingläsern ist daher nicht schwierig durchzuführen und gestattet einen Rückschluß auf deren Gehalt an färbenden Goldteilchen.

Auf kolorimetrischem Wege wurde z. B. bei Glas *M* der Gehalt an färbendem Golde zu  $87 \cdot 10^{-6}$  mg pro Kubikmillimeter Glas gefunden, während der Gesamtgehalt  $160 \times 10^{-6}$  mg betrug.

Es ist also etwas mehr als die Hälfte des Goldes in färbendem Zustande vorhanden. Der Rest des Goldes ist wahrscheinlich in dem vorhin erwähnten optisch leeren Zustande enthalten. Ähnliche Resultate wurden auch mit den anderen Rubingläsern erhalten.

Würde man an Stelle des kolorimetrisch ermittelten für *A* den Gesamtgoldgehalt einsetzen, so würde das Endresultat im Verhältnis 1,18:1, also im Vergleich zu den durch die Methode der Untersuchung zugänglich gemachten Größenunterschieden von linear 5–250  $\mu\mu$  nur unbedeutend geändert werden.

Bei stark getrübbten Gläsern mit größeren Goldteilchen ist die Kolorimetrie nicht gut durchführbar; es wurde in solchen Fällen für *A* der Gesamtgoldgehalt gesetzt und damit eine obere Grenze für die Teilchengröße ermittelt, die aber nur in einzelnen Fällen wesentlich von der wirklichen abweicht.

Zur Beurteilung dieser Verhältnisse sei hier nur kurz angeführt, daß jedes goldhaltige Glas seinen Goldgehalt (bis auf

1) Vgl. R. Zsigmondy, Lieb. Ann. 301. p. 29. 361. 1898; ferner G. Bredig, Anorgan. Fermente, Leipzig 1901; Lottermoser, Über anorganische Kolloide, Stuttgart 1901.

einen geringen Bruchteil) bei andauerndem Erhitzen bis zum Erweichen des Glases entweder unter Rotfärbung, oder unter Trübung ausscheidet. Stark getrübe Goldgläser verändern sich bei dieser Behandlung nicht wesentlich, es ist also anzunehmen, daß deren Goldgehalt bereits zur Ausscheidung gelangt ist.

Dagegen konnten wir bei einem Glase, bei welchem der Vergleich mit anderen Gläsern darauf schließen ließ, dass die Hauptmenge des Goldes noch in optisch leerem Zustande vorhanden war, durch nachträgliches Erwärmen die oben erwähnte Veränderung (Abscheidung des Goldes in dem für dunkle Rotglut stabilsten Zustande der gröberen, getrüben Goldausscheidung) erzwingen.<sup>1)</sup>

Wir wenden uns jetzt zu einer Besprechung der Fehlerquellen bei der Größenbestimmung der Goldteilchen.

Man hat in Betracht zu ziehen:

1. Fehler, durch unrichtige Annahme über die Gesamtgoldmenge der Teilchen, welche in 1 cmm Glas enthalten sind.

2. Fehler in der Volumenbestimmung des erleuchteten Raumes.

3. Fehler, die beim Zählen der Teilchen gemacht werden.

— Ferner bei Ermittlung der Lineardimension:

4. Falsche Annahmen über das spezifische Gewicht.

5. Fehler durch willkürliche Annahme einer Würfelform.

1. Über den Einfluß der Fehler, welche durch unrichtige Annahme über den Gesamtgoldgehalt der Teilchen gemacht werden können, ist schon im vorigen Abschnitte berichtet worden. In jenen Fällen, wo Kolorimetrie möglich ist, kann man diese Fehlerquelle als größtenteils beseitigt ansehen unter der Voraussetzung der Richtigkeit der erwähnten Faraday'schen Hypothese.

2. Fehler bei der Volumenbestimmung. An der Stelle der größten Einschnürung des Lichtkegels befindet sich das Bild des Lichtspaltes (in Figg. 12 u. 13 bei *a*, *b*). Dasselbe ist nach rechts und links, nach oben und unten genügend scharf begrenzt.

1) Man vergleiche mit dem hier Gesagten die interessanten Ausführungen von W. Spring (l. c. p. 1018 u. 1019).



Durch Stellung des Okularmikrometers, wie in Fig. 13 (p. 18) angedeutet, kann das Raumbild nach vorn und rückwärts scharf abgegrenzt werden. Es handelt sich noch darum, die Breite und Tiefe des erleuchteten Glasvolumens möglichst genau festzustellen. Es geschieht das durch wiederholte Ablesung am Okularmikrometer eventuell unter Benutzung mehrerer Mikroskopobjektive. Die Fehler, welche dabei gemacht werden, können nach zahlreichen Vorversuchen auf  $\pm 10$  bis 15 Proz. veranschlagt werden.

Bei Gläsern mit sehr kleinen Goldteilchen, welche zur Beleuchtung die Verwendung von Mikroskopobjektiven höherer Apertur erforderlich machen, tritt allerdings eine neue Schwierigkeit hinzu, die darin besteht, daß die Sehtiefe (Fokustiefe) des Beleuchtungsmikroskopes kleiner ist, als die Bildtiefe des Lichtkegels.

Die Sehtiefe läßt sich annähernd nach den von Abbe gegebenen Formeln <sup>1)</sup> berechnen.

Da die Bestimmung einiger darin enthaltener Werte mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet ist, wird man besser tun, dort, wo es möglich ist, die Sehtiefe direkt experimentell zu ermitteln.

Die direkte Bestimmung geschah in der Art, daß die gemessene Bildtiefe des Spaltbildes durch allmähliches Tiefer-schrauben des Mikroskoptubus in mehrere aneinander grenzende Schichten zerlegt wurde. Man bemerkt dabei ein fortwährendes Wechseln der Mikroskopbilder. Durch langsames Tieferstellen der Mikrometerschraube kann man nun ein Bild nach dem anderen entstehen und wieder verschwinden lassen.

Sei  $s$  die Anzahl der auf diese Art erhaltenen Bilder,  $t$  die Tiefe des Spaltbildes <sup>2)</sup>, dann ist die Sehtiefe des Mikroskopes  $S = t/s$ .

Wenn man einigermaßen verlässliche Resultate erhalten will, so muß man die Sehtiefe an dem zu untersuchenden Präparat selbst oder an einem anderen mit annähernd gleichen Brechungs-exponenten und Teilchen von annähernd gleicher

1) Vgl. z. B. Dippel, Handbuch der allgemeinen Mikroskopie, p. 202. Braunschweig 1882.

2) Als Kontrolle für  $t$  kann die Ablesung an der Mikrometerschraube dienen.



Helligkeit bestimmen. (Am leichtesten ist die Tiefenbestimmung ausführbar, wenn die Teilchen nicht zu nahe aneinander liegen.)

Es wurden z. B. in drei Versuchsreihen als Mittelwerte gefunden:

	<i>S</i>	Bemerkung	
<i>A</i>	0,6, 0,66	kleine Goldteilchen	Homogene Immersion $\frac{1}{11}$ Kompens.-Okular 6
<i>B</i>	0,5, 0,58, 0,66	kleine Goldteilchen	
<i>C<sub>1</sub></i>	0,5, 0,53	größere Goldteilchen	
<i>C<sub>2</sub></i>	0,97, 1,0, 0,71	Teilchen, dieselben wie bei <i>C<sub>1</sub></i> , aber hell erleuchtet	

Bei Bestimmung an hell erleuchteten Teilchen kann demnach die Fokustiefe bis doppelt so groß ausfallen, als bei Bestimmung an weniger hellen Teilchen.

Dagegen waren die größten Abweichungen der Mittelwerte bei annähernd gleich hellen Teilchen 0,5 und 0,66, also rund 1:1,3.

*Gesamtfehler bei der Volumenbestimmung.* Nehmen wir als größte Fehler bei den Längen und Breitenbestimmungen des auszuzählenden Raumes etwa 15 Proz. an, also 1:1,15, bei der Tiefenbestimmung 1:1,3, dann erhalten wir das Volumen, wenn alle Fehler in demselben Sinne gemacht werden, im Verhältnisse 1:1,7 zu groß.

3. *Fehler bei der Zählung.* Man könnte meinen, daß bei der Auszählung sichtbarer Teilchen beträchtliche Fehler überhaupt nicht möglich sind; tatsächlich sind auch die Resultate der Zählung von Teilchen, die genügenden Abstand voneinander haben und deutlich sichtbar sind, ganz unbedeutend und man hat hier nur zu untersuchen, in welchem Spielraum die zufälligen Unregelmäßigkeiten der Verteilung Abweichungen der gefundenen Mittelwerte hervorbringen können. Diese Frage ist von E. Abbe eingehend behandelt worden in seinem Vortrag „Über Blutkörperzählung“.<sup>1)</sup> Es genügt, hier das Resultat jener Unter-

1) E. Abbe, Sitzungsber. der Jenaischen Gesellsch. für Medizin und Naturwissenschaft 12. Bd. Jahrgang 1878. Sitzung vom 29. November.

suchung wiederzugeben. Danach ist die wahrscheinliche relative Abweichung  $\omega$  (als Bruchteil des vorausgesetzten Mittelwertes)

$$\omega = \frac{0.674}{\sqrt{n}}$$

Wie sich leicht erkennen läßt, wird durch mehrfache Wiederholung der Zählungen von je 30—50 Teilchen an verschiedenen Stellen des Glases eine für unsere Zwecke vollständig ausreichende Genauigkeit erzielt, wenn die Teilchen deutlich sichtbar sind, da im Endresultate auf Grund anderer Fehlerquellen keine größere Genauigkeit als 10 oder 20 Proz. für Bestimmung der Lineardimension oder deren oberer Grenze angestrebt wird.

Ganz anders liegen aber die Verhältnisse bei jenen Rubin-gläsern, bei denen die Teilchenabstände an der Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskopobjektives liegen. Hier macht sich die Heterogenität der Anordnung der Teilchen sehr fühlbar, und kann zu ganz irrigen Resultaten führen.

Wären die Teilchen ganz gleichmäßig im Glase verteilt, so würde die Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskopes ein Mittel abgeben, um über den Minimalabstand der Teilchen orientiert zu sein. Thatsächlich ist aber dieser ideale Grenzfall nie erreicht, man findet die Partikel vielmehr in Gruppen von 2—8 und mehr Teilchen angeordnet; die Zwischenräume zwischen diesen Gruppen sind größer als die Teilchenabstände in einer Gruppe: sind letztere Abstände kleiner als die Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskopes, erstere aber größer, so erscheinen nur die Abstände der Gruppen gelöst, nicht aber die Abstände innerhalb der Gruppen und infolgedessen wird die ganze Gruppe als einzelnes Beugungs-scheibchen erscheinen und als ein Teilchen gezählt werden.

Wir haben uns wiederholt von dem sehr bedeutenden Einflusse, welchen die Heterogenität der Anordnung auf die Teilchenzählung ausübt, überzeugt bei Goldgläsern mit gröberen Teilchen, die abwechselnd mit schwächerer und stärkerer Vergrößerung ausgezählt wurden; immer war das Resultat derart, daß man mit der geringeren Vergrößerung und dem System kleinerer Apertur zu wenig Teilchen fand.

Bei einiger Übung ist es nicht schwer die Beugungs-scheibchen, welche von Einzelteilchen herrühren, von den-

jenigen der Teilchengruppen zu unterscheiden. Die ersteren erscheinen hell auf dunkeltem Grunde und sind immer kreisrund und scharf begrenzt, die Einzelscheibchen zeigen untereinander annähernd gleiche Helligkeit. Die letzteren erscheinen unscharf begrenzt, häufig eckig (wahrscheinlich infolge von Superposition mehrerer Scheibchen der Einzelelemente in den Gruppen) und heben sich nicht so vollkommen von der Umgebung ab, wie die ersteren; zwischen den zählbaren Beugungsscheibchen ist öfter noch diffuses Licht bemerkbar, von kleineren Teilchen herrührend, auch sind hellere neben sehr lichtschwachen Beugungsscheibchen wahrnehmbar.

Wie groß die Fehler sind, welche durch Zählung von Gruppen als Einzelteilchen gemacht werden, darüber läßt sich bei den feineren Zerteilungen nichts Bestimmtes angeben; wir begnügen uns damit, in solchen Fällen die aus der Zählung der Beugungsscheibchen berechnete obere Grenze der Teilchengröße anzugeben. Nehmen wir willkürlich an, daß durchschnittlich höchstens 27 Teilchen zu einer Gruppe vereinigt sein können, so würde die obere Grenze der Lineardimension höchstens dreimal so groß gefunden werden, als die Teilchen selbst sind.

Um einen ungefähren Anhalt zu bekommen, wie groß die Fehler durch Gruppenbildung bei unvollkommener Auflösung sein können, wurden Zählversuche mit gröberen Zerteilungen bekannter Teilchengröße angestellt unter Verwendung von Objektiven, welche zur Auflösung der Teilchenabstände nicht mehr ausreichten. Es wurden mit solchen Objektiven gewöhnlich 3—5, einmal sogar zehnmal weniger Teilchen gefunden, als durch direkte Bestimmung mit Systemen höherer Apertur.

Unter der Annahme, dass die Verhältnisse bei den feineren Zerteilungen, die durch die stärksten Objektive nicht vollkommen lösbar sind, ähnlich liegen, würde die durch Gruppenzählung bestimmte Teilchenzahl drei- bis fünf-, höchstens zehnmal so klein und die Lineardimension etwa höchstens zweimal so groß gefunden werden, als die tatsächlich vorhandene.

4. u. 5. Fehler bei der Berechnung der Lineardimensionen. Wie schon erwähnt, gibt unsere Methode (innerhalb der Fehlergrenzen) nur Aufschlüsse über die Masse der Goldteilchen;

es erübrigt noch, einige Betrachtungen über diejenigen Annahmen anzustellen, welche zur Berechnung der Lineardimensionen gemacht werden.

4. *Spezifisches Gewicht.* Wie schon Rose<sup>1)</sup> gefunden hat, ist das spezifische Gewicht des feinzerteilten, durch Eisenvitriol gefällten Goldes etwas höher als das des gewöhnlichen metallischen Goldes; es ist nicht ausgeschlossen, daß dem Golde in äußerster Zerteilung ein noch höheres spezifisches Gewicht zukommt.

5. Unterschiede dieser Art würden aber wegen ihrer Geringfügigkeit das Endresultat wenig beeinflussen.<sup>2)</sup> Dagegen können die tatsächlich vorhandenen Lineardimensionen sehr beträchtlich von den berechneten abweichen, wenn das Gold in den kleinen Teilchen nicht der Annahme entsprechend in Würfel-form, sondern in anderer, z. B. in Form äußerst feiner Lamellen, vorhanden ist. Auf diesen Gegenstand wollen wir später zurückkommen und uns hier in Erinnerung bringen, daß unsere Lineardimensionen aus der Masse unter Annahme einer Würfelform und voller Raumerfüllung derselben mit metallischem Golde berechnet sind und zunächst bloß zur übersichtlichen Orientirung über das in Betracht kommende Gebiet dienen sollen.

*Gesamtfehler bei der Bestimmung der mittleren Teilchengrößen.* Wir wollen hier zunächst jene Fälle in Betracht ziehen, bei welchen günstige Verhältnisse für die Bestimmung der Teilchengröße vorliegen.

Es sei also ein Goldglas gegeben mit vollkommen auflösbaren Teilchenabständen, bei dem überdies eine kolorimetrische Gehaltsbestimmung möglich ist. Es entfallen dadurch die unter 1. und ein Teil der unter 3. beschriebenen Fehlerquellen.

1) Gmelin Kraut, Handb. d. anorgan. Chem. 3. p. 1005. 1875.

2) Auch die Annahme allotroper Modifikationen würde das Endresultat wenig beeinflussen. Man vergleiche die spezifischen Gewichte der allotropen Modifikationen von Gold, J. Petersen, Zeitschr. f. phys. Chem. 8. p. 601; von Zinn, E. Cohen u. von Eijk, Zeitschr. f. phys. Chem. 30. p. 601. 1899; 33. p. 57. 1900; von Silber, C. Lea, American Journ. of Sc. 37. p. 476. 1889.

*Fall a).* Wir haben dann die Gesamtfehler bei der Volumenbestimmung und die Fehler bei der Auszählung der Teilchen infolge zufälliger Unregelmäßigkeiten in der Verteilung zu berücksichtigen. Setzen wir den Maximalbetrag der ersteren so groß wie oben angegeben und nehmen die letzteren bei mehrfacher Wiederholung der Zählung von je mindestens 50 Teilchen zu höchstens 10 Proz. an, ziehen ferner den ungünstigsten Fall, daß alle Fehler in der gleichen Richtung gemacht werden, in Betracht, dann werden wir den Raum im Verhältnis 1:1,7, die Teilchenzahl pro Volumeneinheit im Verhältnis 1:1,1 zu groß bez. zu klein finden.

Der Gesamtfehler bei der Bestimmung der Teilchenzahl in der Volumeneinheit würde also im ungünstigsten Falle 1:1,9 sein. Im gleichen Verhältnis würde die Masse der Teilchen zu klein gefunden werden, die Lineardimensionen aber im Verhältnis 1:1,2 zu klein.

*Fall b).* Bei Gläsern mit größeren Teilchen läßt sich der Gehalt durch Kolorimetrie nur dann bestimmen, wenn man ein Vergleichsobjekt mit annähernd gleicher Teilchengröße zur Verfügung hat; da dies nur schwierig zu erreichen ist, so haben wir auf kolorimetrische Bestimmung verzichtet; die angegebenen Lineardimensionen sind dann Maximalwerte.

Wie später gezeigt wird, haben wir in der Helligkeit der Beugungsscheibchen ein ausgezeichnetes Mittel zur Kontrolle der Teilchengrößen, das uns in Stand setzt, beträchtliche Fehler dieser Art sofort zu erkennen. Auch hat man im Wiedererwärmen des Glases, wie schon oben gezeigt wurde, ein einfaches Mittel, um zu prüfen, ob der größere Teil des Goldes ausgeschieden oder in homogener (optisch leerer) Lösung enthalten ist.

*Fall c).* Die Teilchen liegen so dicht, daß die Abstände nicht mehr vollkommen aufgelöst werden können. Dieser Fall tritt nur ein bei Rubingläsern, deren Gehalt kolorimetrisch geprüft werden kann. Wir haben also neben den unter A ausgeführten Fehlern diejenigen zu berücksichtigen, welche durch Zählung von Teilchengruppen als Einzelteilchen gemacht werden. Die Fehler liegen in demselben Sinne, wie bei B, die gefundenen Lineardimensionen sind demnach nur als obere Grenzen anzusehen und können bis zwei-, höchstens

dreimal so groß sein, als die tatsächlich vorhandenen (vgl. „Fehler bei der Zählung“ p. 25).

*Ermittelung der Teilchengrößen aus den Teilchenabständen.* Die in den vorhergehenden Abschnitten ausführlich behandelte Bestimmung der Teilchengrößen setzt einen beträchtlichen Aufwand von Arbeit voraus und wird sich nur dann lohnen, wenn man Gewißheit über die in Betracht kommenden Teilchengrößen erhalten will.

Da die optische Beleuchtungsmethode nun Aufschluß gibt über die meisten trüben Medien, und auch über viele bei gewöhnlichem Tageslicht klare Flüssigkeiten (kolloidale Lösungen) und in den meisten Fällen zunächst nur eine vorläufige Orientirung über die ungefähre Größe der vorhandenen Teilchen erwünscht ist, so wird man für gewöhnlich der Schätzung der Abstände den Vorzug geben.

Dies ist bei flüssigen kolloidalen Lösungen, bei welchen die Teilchen sich in ununterbrochener, lebhafter Bewegung befinden, allein ausführbar, und hat ferner den Vorzug, sehr rasch durchführbar zu sein.

Es sei  $r$  der mittlere Teilchenabstand in Millimetern,  $n$  die Teilchenzahl pro Kubikmillimeter,  $A$  wie früher der Gehalt (in Milligramm pro Kubikmillimeter) und  $s$  das spezifische Gewicht der zerteilten Substanz, dann ist

$$l = \sqrt[3]{\frac{A}{s}} \times r.$$

Die Schätzung der Teilchenabstände geschieht mit Hülfe des Okularmikrometers, dessen Werte für jedes beliebige Mikroskopsystem sich leicht mit der Hülfe eines Objektmikrometers aichen lassen.

Die Schätzung gibt bei einiger Übung ganz befriedigende Resultate; es wurde bei der genaueren Bestimmung der Teilchengrößen durch Zählung meistens auch eine Schätzung der Abstände durchgeführt und die daraus berechnete Lineardimension mit den genaueren, durch Zählung erhaltenen Werten verglichen. Man erhält bei der Schätzung selten Werte, welche von der bestimmten Lineardimension um mehr als 1:2 abweichen, meist war die Abweichung eine geringere.

Es ist allerdings darauf zu achten, daß die Sehtiefe des Mikroskopes ungefähr ebenso groß gewählt wird, wie die Teilchenabstände; ist sie erheblich größer, so wird man die Abstände zu klein finden, ist sie kleiner, so werden die Abstände zu groß gefunden.

Bei Flüssigkeiten mit bewegten Teilchen wird die Schätzung durch die Bewegung der Teilchen erschwert; sie ist immerhin durchführbar und man hat eine gute Kontrolle in der Verdünnung der Flüssigkeit. Durch Verdünnung der Flüssigkeit werden die Teilchenabstände proportional der dritten Wurzel aus der Volumenvermehrung vergrößert, vorausgesetzt, daß durch die Verdünnung keine Veränderung der Teilchen im Sinne weitgehender Zerteilung (Bildung einer optisch leeren Flüssigkeit, z. B. einer kristalloiden Lösung) stattfindet.

*Kontrolle der ermittelten Teilchengrößen durch Vergleich ihrer Helligkeit.* Nehmen wir an, daß die Intensität der von materiellen Teilchen bestimmter Art gebeugten Strahlen sich bei gleichbleibender Intensität der Beleuchtung proportional ihrer Fläche ändert, so würde ein Teilchen von  $1\ \mu$  Durchmesser 10000 mal mehr Licht zerstreuen als ein Teilchen von  $10\ \mu\mu$  Durchmesser.

Thatsächlich haben wir auch in unserem Apparate ganz enorme Helligkeitsunterschiede zwischen den größten und den kleinsten Teilchen, welche durch seitliche Beleuchtung sichtbar gemacht werden können, beobachtet. Es gehört einige Übung und ferner Beleuchtung mit Sonnenlicht und Anwendung von Homogenimmersion dazu, um die kleinsten Teilchen noch wahrnehmbar zu machen; dagegen strahlt ein Teilchen von  $1\ \mu$  Durchmesser unter gleichen Verhältnissen so viel Licht aus, daß das Auge von der Lichtfülle geblendet, längere Zeit der Erholung bedarf, um etwa 50 mal kleinere Teilchen wieder wahrnehmen zu können. Zwischen den erwähnten Extremen finden sich unzählige Abstufungen der Helligkeit der Beugungsscheibchen und wir sind bei der Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsunterschiede sehr wohl im stande, durch Vergleich der Helligkeit der Beugungsscheibchen zweier gleichartiger Teilchen ein Urteil darüber abzugeben, welches von beiden Teilchen das größere ist.



### III. Beziehungen zwischen Farbe und Teilchengröße bei Goldrubingläsern.

Im folgenden soll eine Anwendung der von uns in den vorhergehenden Abschnitten mitgeteilten Methoden der Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen und der Ermittlung von Teilchengrößen gegeben werden.

Als Versuchsobjekte dienten goldhaltige Gläser, welche der eine von uns (Z.) in der russischen Glasfabrik Zombkowice hergestellt hatte.

Es sei uns gestattet, zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die Eigenschaften des Goldrubinglases vorzuschicken. Wie schon erwähnt (II. Abschnitt p. 19), kommt jedes Goldglas zunächst in farblosem, optisch leerem Zustande aus dem Ofen<sup>1)</sup> und scheidet erst beim Wiedererwärmen oder bei sehr langsamer Abkühlung seinen Goldgehalt aus. Diese Ausscheidung kann nun in der Weise erfolgen, daß die Zerteilung eine außerordentlich große bleibt: in diesem Falle erscheint das Glas bei gewöhnlichem Tageslichte mehr oder weniger intensiv gefärbt, im auffallenden Lichte aber klar, ohne Trübung (einer kolloidalen Lösung entsprechend), z. B. im Glase *F, G, H* der nachstehenden Tabelle, oder die Ausscheidung erfolgt in größeren Teilchen (den gewöhnlichen grob mechanischen Suspensionen entsprechend), wie bei Glas *A* und *B*. Das Glas erscheint dann im durchfallenden Licht farblos oder wenig gefärbt, im auffallenden Lichte aber (braun oder goldig, zuweilen auch grün) getrübt.

Dazwischen gibt es alle Arten von Übergängen.

Von großem Einfluß auf die Teilchengröße des Goldes ist die Behandlung des Glases am Ofen. Man kann aus ein und demselben homogenen Glase das Gold in verschiedenartiger Zerteilung zur Ausscheidung bringen, je nach der Art des Wiedererwärmens. Ein Beispiel dafür gibt das Glas *C*.

Die großen grünen Goldteilchen des Präparates *C, a* sind im schnell und sehr stark erhitzten Randstücke des Glases *C*

1) Das Gold ist in diesem farblosem Glase wahrscheinlich als Kristalloid gelöst, ähnlich wie Zucker in Wasser.



entstanden, die kleineren, ebenfalls grünen Teilchen des Präparates *C*, *c*, in dem weniger stark erhitzten Mittelstücke desselben Glases.

Wird ein homogenes Goldglas bestimmter Zusammensetzung in allen seinen Teilen einer gleichmäßigen Wiedererwärmung ausgesetzt, so scheidet sich das Gold in allen Teilen in annähernd der gleichen Teilchengröße und Beschaffenheit aus. Aus verschiedenen zusammengesetzten Gläsern erhält man aber meist Teilchen von verschiedener Beschaffenheit.

Die Größe, Farbe und die übrigen optischen Eigenschaften der Goldteilchen sind demnach abhängig von der Zusammensetzung des Glases einerseits, von der Art seiner Behandlung im Feuer andererseits.

Schlieren sind meist etwas anders zusammengesetzt als die Hauptmasse des Glases (sie enthalten z. B. etwas mehr Tonerde oder etwas weniger Alkali), es wird sich daher das Gold in denselben meist in anderer Beschaffenheit ausscheiden als in der Hauptmasse.

Interessant ist in dieser Hinsicht das Glas *E*, welches sehr kleine grüne und braune<sup>1)</sup> Goldteilchen von annähernd gleicher Größe enthält und zwar in der Hauptmasse des Glases nur braune, in den Schlieren aber nur grüne Teilchen.

Die berechneten Mittelwerte der Teilchengrößen sind, wie schon in der früheren Abhandlung ausgeführt, etwas größer als die wirklich vorhandene mittlere Teilchengröße.

Bei den Gläsern *A*, *B* und *D*, wo der Gesamtgoldgehalt der Rechnung zu Grunde gelegt ist, werden sie nur wenig von der wirklichen Größe abweichen, da das meiste Gold an diesen Gläsern zur Ausscheidung gelangt ist und die Einzelteilchen sich in vollständig auflösbaren Abständen befanden, sich also richtig auszählen ließen.

1) Wir bezeichnen hier und im folgenden als grüne bez. braune etc. Teilchen diejenigen, welche das Licht in grüner bez. in brauner Farbe zerstreuen, also grüne bez. braune Beugungsbilder gaben. Die Gesamtwirkung der grünen Teilchen ist die, daß das Glas im durchfallenden Licht rot, der braunen die, daß es blau erscheint. In einer vorläufigen Mitteilung (Zeitschr. f. Elektrochem. 8. p. 684. 1902) wurden abweichend von unserer Bezeichnung die Teilchen nach der Farbe, welche sie dem Glase im durchfallenden Licht erteilen, benannt.

Beträchtlich größer ist die Abweichung des berechneten Maximalwertes der Teilchengröße von dem wirklich vorhandenen bei den Gläsern *G*, *E* und *H*, da hier Gruppen von Teilchen als Einzelscheibchen gezählt wurden; das gilt namentlich vom Glase *G*.

Zur ungefähren Orientierung über die Größe der Abweichung diene das im II. Abschnitt unter „Gesamtfehler bei der Bestimmung der mittleren Teilchengrößen, Fall *c*“ Gesagte.

Bei Glas *F* war Kolorimetrie möglich und die Gruppenbildung nicht sehr ausgesprochen; die gefundenen Teilchengrößen dürften den wirklich vorhandenen daher sehr nahe liegen.

Es sei schließlich noch hervorgehoben, daß die in Tab. II gegebenen Lineardimensionen (wie schon früher ausgeführt) aus der Masse der Goldteilchen unter Annahme einer Würfelform und voller Raumerfüllung mit metallischem Golde berechnet sind.

Wir wollen später noch auf diesen Gegenstand zurückkommen.

In Tab. I sind die Farben der Gläser im durchfallenden Lichte, die Farbe des Lichtkegels bei Betrachtung mittels des Nicolschen Prismas und ohne dasselbe zusammengestellt; in Tab. II sind Gesamtgoldgehalt, kolorimetrisch bestimmter Goldgehalt und die Teilchengrößen der Goldteilchen in den einzelnen Gläsern angeführt.

Es wurde gewöhnlich der zur Auszählung bestimmte Raum im Glase durch genügende Spaltverengung und Mikrometerabgrenzung so begrenzt, daß etwa 15–30 Goldteilchen zur Auszählung gelangten. Diese Zählung wurde mehrfach an benachbarten Stellen wiederholt; man erhielt auf diese Weise einen Durchschnittswert der Teilchengrößen, welcher aus der Auszählung von etwa 100–200 Goldteilchen unter Benutzung der früher gegebenen Formeln sich berechnen ließ.

Dieselbe Operation wurde an anderen Stellen desselben Glases wiederholt, sodaß man für ein und dasselbe Glaspräparat mehrere Durchschnittswerte für die Teilchengröße erhielt.

In der unten stehenden Tab. II sind nun die voneinander am meisten abweichenden Durchschnittswerte für jedes Glaspräparat mitgeteilt, welche den gefundenen Mittelwert für das Glaspräparat einschließen.

Tabelle I.

Glas	Farbe im durchfallenden Licht (ca. 4 mm dicke Schicht)	Farbe des Lichtkegels	Verhalten des Lichtkegels bei Betrachtung mit dem Nikol <sup>1)</sup>	Nikol $\perp$ zur Einfallebene
A	Farblos	Goldgelb	Weißgelb	Rotgelb, wenig geschwächt
B	Schmutzig rötlich, lebzig getrübt	Goldgelb, sehr intensiv	Weißgelb	Rotgelb, wenig geschwächt
C a	Fast farblos	Grün, intensiv	Grün, kaum geschwächt	Grün, stark geschwächt
C b	Rosa	Grün	Grün, kaum geschwächt	Grün, stark geschwächt
C c	Rosa	Grün	Grün	Grün, fast ausgelöscht
D a	Hellblau	Rosa-kupferrot	Wie ohne Nikol	Braun, geschwächt,
D b	Hellblau bis violett	Messinggelb	Wie ohne Nikol	Braunrot, geschwächt
E	Blauviolett mit rosa Schlieren	Braun, mit grünen Schlieren	(Wie ohne Nikol; die grünen Schlieren zum Teil heller als die braunen)	Braun geschwächt Grün ausgelöscht
F	Hellrot	Grün, wenig intensiv	Wie ohne Nikol	Fast ausgelöscht
G	Hochrot intensiv	Grün, wenig intensiv	Wie ohne Nikol	Stellenweise ausgelöscht
H	Rosa	Grün, wenig intensiv	Wie ohne Nikol	Stellenweise ausgelöscht

1) Die Beobachtung des Lichtkegels wurde unter dem Mikroskop bei schwacher Vergrößerung ausgeführt. Ähnlich wie der Lichtkegel verhalten sich auch die Beugungsbilder der Einzelscheibchen, wenn man keine zu starke Vergrößerung anwendet.

Tabelle II.

Glas	Gesamtgold- gehalt Kubikmillimeter Gold pro Kubikmillimeter Glas	Kolorimetrisch gefundener Goldgehalt	Teilchengröße in $\mu\mu$	
			a) Aus dem Gesamtgold- gehalt	b) Aus dem kolorimetrisch bestimmten Goldgehalt
A <sup>1)</sup>	12,6 $\cdot 10^{-6}$	—	487—791	—
B <sup>1)</sup>	10,1 $\cdot 10^{-6}$	—	131—173	—
C a <sup>1)</sup>	13,3 $\cdot 10^{-6}$	—	115—145	—
C b <sup>1)</sup>	13,3 $\cdot 10^{-6}$	—	63—106	—
C c <sup>1)</sup>	13,3 $\cdot 10^{-6}$	1,34 $\cdot 10^{-6}$ 2)	20,6—32,8	9,6—15,3
D a <sup>1)</sup>	6,8 $\cdot 10^{-6}$	—	68,8—103	—
D b <sup>1)</sup>	6,8 $\cdot 10^{-6}$	—	68—74	—
E	9,05 $\cdot 10^{-6}$	4,5 $\cdot 10^{-6}$	13,2—17,4	10,5—13,9
F	8,0 $\cdot 10^{-6}$	4,4 $\cdot 10^{-6}$	9,3—12,5	7,6—10,2
G	14,0 $\cdot 10^{-6}$	7,2 $\cdot 10^{-6}$	10,5—13,2	8,4—10,6
H	—	1,0 $\cdot 10^{-6}$	—	3,9—6,9 <sup>3)</sup>

Ein Blick auf die Tab. II lehrt, daß das Gold im Glase in den verschiedenartigsten Teilchengrößen enthalten sein kann. Die kleinsten noch ermittelbaren Teilchengrößen finden sich im Glase H mit 3,9—6,9  $\mu\mu$ , die größten im Glase A mit 487—791  $\mu\mu$ . Die größten Goldteilchen sind demnach linear etwa 100 mal größer und besitzen eine rund millionenmal größere Masse als die kleinsten in der Tabelle aufgenommenen Goldteilchen.

1) Teilchenabstände vollkommen auflösbar.

2) Dieser Wert dürfte zu klein sein; er hätte nur dann richtig ermittelt werden können, wenn eine Vergleichsflüssigkeit mit gleicher Teilchengröße und Nüance zur Verfügung gestanden hätte. Die wahre Teilchengröße liegt jedenfalls zwischen den unter a und b mitgeteilten Zahlen.

3) Die Zerteilung in diesem Glase war sehr gleichmäßig; der kleinere hier mitgeteilte Wert wurde nur einmal mit etwas stärkerer Okularvergrößerung gefunden und zwar bei grellster Sonnenbeleuchtung, gewöhnlich erhielt man mit Komp.-Okular 6 Werte, die nahe bei 6  $\mu\mu$  lagen; dennoch ergab der mikroskopische Befund die Ueberzeugung, daß die wahre mittlere Teilchengröße der kleineren Zahl näher liegen muss als der größeren, es sind hier beide äußersten Werte aufgenommen.

Die feinere Zerteilung wirkt intensiv färbend, die gröbere aber nicht oder nur unbedeutend.

Vergleichen wir die Tabellenwerte untereinander, so ergibt sich zunächst die interessante Tatsache, daß die Farbennuance nicht in erkennbarem Zusammenhang mit der Teilchengröße steht.<sup>1)</sup> Denn wir finden grün reflectirende Teilchen bei den Gläsern *C*, *F*, *G* und *H* in Größen von 3,9 bis 145  $\mu\mu$  (die größten geben intensiv leuchtende Beugungsbilder, die kleinsten können nur mit Anstrengung wahrgenommen werden, alle beugen aber das Licht in grüner Farbe), wir finden aber auch braun und kupferrot reflektierende Teilchen bei dazwischen liegenden Größen (Glas *E*: 10,5—13,9  $\mu\mu$  und *Da*: 68 bis 103  $\mu\mu$ ). Gelbe Teilchen waren in den Präparaten *A* (487 bis 791  $\mu\mu$ ), *B* (131—173  $\mu\mu$ ) und *Db* (68—74  $\mu\mu$ ) enthalten.

Das Glas *E* enthält in der Hauptmasse braune Teilchen von 10,5—13,9  $\mu\mu$ , in den Schlieren grüne Teilchen von annähernd gleicher Größe. Die grünen Teilchen des Glases polarisieren das Licht anders als die braunen.

Während ohne Nikol oder bei Parallelstellung desselben zur Einfallsebene die grünen Schlieren ebenso hell aussehen wie die braunen, eher noch heller, werden die ersteren bei Stellung des Nikols senkrecht zur Einfallsebene ausgelöscht, während das Braun der übrigen Goldteilchen nur geschwächt erscheint.

Ebenso zeigen sich sehr bemerkenswerte Unterschiede in der Polarisation der großen gelben und der kleineren grünen Teilchen.

1) Es mag bemerkt werden, dass Faraday zu einem ähnlichem Resultate gelangt ist auf Grund seiner Beobachtungen über das Absetzen von fein zerteiltem Golde aus Flüssigkeiten. Faraday fand, daß die rubinroten Flüssigkeiten ihren Goldgehalt meist langsamer absetzen als die blau nuanzierten, daß aber auch blaunuanzierte Flüssigkeiten beobachtet werden konnten, welche das Gold ebenso langsam absetzen wie die roten. M. Faraday, *Philosoph. Transactions of the Roy. Soc. of London* 147. p. 163. 164 u. 165. 1857. Man vgl. z. B. p. 165 unten: But that the blue particles are always merely larger particles does not seem admissible for a moment, inasmuch as violet or blue fluids may be obtained in which the particles will remain in suspension as long as in the ruby fluids. Diese Ausführungen Faraday's scheinen Stoeckl und Vanino (*Zeitschr. f. phys. Chem.* 30. p. 89. 1899) entgangen zu sein; in letzterer Arbeit werden Rückschlüsse aus der Farbe der Goldteilchen auf deren Teilchengröße gezogen.

Es sei noch Glas *H* erwähnt; die Teilchen desselben sind so klein, daß sie nur unter den günstigsten Umständen wahrgenommen werden können. Nur bei vollkommener Dunkeladaptation des Auges und hellster Beleuchtung war die Zählung möglich und ergab dann Teilchengrößen zwischen 3,9—6,9  $\mu\mu$ , also Teilchen, welche unter der im ersten Abschnitt angegebenen theoretischen Grenze der Sichtbarmachung liegen, wenn man unsere Lineardimensionen unter Annahme einer Würfelform berechnet.

*Es ist nicht nur möglich, sondern sogar sehr wahrscheinlich, daß die grünen Goldteilchen nicht in Würfelform, sondern in Form von Lamellen ausgebildet sind.* — Dadurch würde eine größere Fläche zur Wirksamkeit gelangen und obiger Widerspruch erklärt werden können.

Die Wahrscheinlichkeit einer flächenartigen Ausbildung sehr kleiner Masseteilchen ist übrigens kürzlich auch von Zacharias<sup>1)</sup> in Betracht gezogen worden.

Auch die anderen oben beschriebenen optischen Eigenschaften werden sich wahrscheinlich ungezwungen aus der Annahme einer verschiedenartigen Ausbildung der Teilchen nach verschiedenen Richtungen hin erklären lassen.

Bei der Annahme, daß die Farbe der Goldteilchen sich mit der Dicke<sup>2)</sup> der Lamellen ändert, würde es ohne weiteres einleuchten, daß braune und grüne Teilchen von gleich großer Masse existieren, ferner auch, daß man grüne Teilchen mit verschiedenen großen Massen vorfinden kann.

1) O. D. Zacharias, Zeitschr. f. physik. Chem. 39. p. 468. 1902. Zacharias nimmt an, daß die Kolloidmoleküle Ausdehnung in einer Ebene besitzen.

2) Eine andere Annahme, daß an Stelle der Dicke die Flächengröße die Farbe beeinflusst, führt bei Anwendung auf Spezialfälle zu Widersprüchen.

Es mag noch bemerkt werden, daß in Fällen, wo die Teilchenabstände *sehr klein* werden (z. B. beim Eintrocknen von kolloidalem Golde mit *sehr wenig Gelatine*), Farbenänderungen eintreten, welche weder von der Gestalt noch von der Teilchengröße abhängig sein können. So wird z. B. ein geeignetes Goldgelatinepräparat beim Eintrocknen blau, beim Anfeuchten wieder rot, beim Wiedereintrocknen abermals blau etc. Über Pleochroismus doppelbrechender Gelatine nach Färbung mit Gold- und Silberlösungen, vgl. H. Ambronn u. R. Zsigmondy, Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 51. p. 13—15. 1899.

Es ist aber auch die Möglichkeit, daß die grüne oder braune Form eine allotrope Modifikation des Goldes darstellt, in Betracht zu ziehen.

Es dürfte noch die Frage von Interesse sein, ob die von uns für Glas *H* angegebenen Teilchengrößen die kleinsten sind, welche dem Golde in seinem färbenden Zustande zukommen. Diese Frage muß, abgesehen davon, daß die gegebenen Zahlen meist obere Grenzen sind, auch aus anderen Gründen entschieden verneint werden; das Glas *H* hat an seinen schwach erhitzten und wenig gefärbten Stellen immer noch einen sehr schwachen, aber deutlichen, polarisierten Lichtkegel erkennen lassen, dessen grünliche Farbe nicht von Teilchen der oben gegebenen Größe herrühren konnte, denn diese hätten in weiteren Abständen als in den stärker gefärbten Partien sich befinden und mikroskopisch noch erkannt werden müssen.

Der Lichtkegel war unter den günstigsten Bedingungen nicht mehr auflösbar, die Teilchenabstände mußten daher eher noch etwas kleiner sein, als in den stärker gefärbten Stellen des Glases. Zieht man noch die durch den kolorimetrischen Vergleich und die geringe Intensität des Lichtkegels gestützte Erfahrung, daß in den schwächer erhitzten Teilen auch weniger Gold zur Ausscheidung gelangt, als in den stärker erhitzten, in Betracht, so kommt man zu dem Resultate, daß noch beträchtlich kleinere, rot färbende Goldteilchen existieren, als die kleinsten, welche unserer Methode zugänglich waren.

Es ist bekanntlich gelungen, Zerteilungen des Goldes wie in den Gläsern, auch in wässerigen Flüssigkeiten herzustellen (kolloidale Lösungen oder Hydrosole des Goldes)<sup>1)</sup>, bei welchen

1) Vgl. II. Abschnitt dieser Abhandlung p. 20 über den Goldgehalt der Rubingläser. Faraday (l. c.) war der erste, der Flüssigkeiten dieser Art hergestellt hat; er schreibt darüber, daß dieselben das Aussehen von Lösungen hätten, daß das Gold in ihnen aber als Metall in fein zerteiltem Zustande enthalten ist.

Den bezeichnetsten, gegenwärtig allgemein üblichen Ausdruck: kolloidale Lösung konnte Faraday nicht gebrauchen, weil der Begriff „Kolloidallösung“ erst einige Jahre später von Graham aufgestellt wurde.

Wir vermeiden es absichtlich, den auch von Faraday gebrauchten Ausdruck Suspension für die feineren Zerteilungen zu verwenden, weil derselbe leicht zu Mißverständnissen führen kann, indem der Ausdruck



sich die optischen Erscheinungen der Rubingläser wiederfinden. Zum Unterschiede vom Gold in den Rubingläsern befinden sich die Goldteilchen im Hydrosol des Goldes in äußerst lebhafter Bewegung; unter Einhaltung einiger Vorsichtsmaßregeln gelingt es nun, intensiv rotes Goldhydrosol herzustellen, in welchem der linear polarisierte Lichtkegel in nicht mehr auflösbarer, kaum merklich weißlicher Farbe erscheint, und von dem es zweifelhaft ist, ob er vom Golde oder von irgend einer in Spuren auftretenden Verunreinigung herrührt. Diese Flüssigkeiten dürften wohl die äußerste Zerteilung des rot färbenden Goldes enthalten; die Teilchengröße ist sicher noch beträchtlich kleiner als  $3-6\ \mu$ , also auch kleiner als die von Lobry de Bruyn aus dem Molekulargewicht der löslichen Stärke für das Stärkemolekül berechnete Lineardimension von etwa  $5\ \mu$ .

Auf Fragen dieser Art wollen wir später zurückkommen.

#### Zusammenfassung.

I. Abschnitt. 1. Es wurde eine Methode zur Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen beschrieben.

2. Die zur Sichtbarmachung erforderlichen Apparate wurden durch Abbildung und Beschreibung erläutert.

3. Es wurde der Polarisationszustand der Beugungsscheibchen ultramikroskopischer Teilchen kurz besprochen.

4. Es wurde ein theoretischer Grenzwert der Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen approximativ ermittelt.

„suspensierte Teilchen“ von den Chemikern, die hauptsächlich damit zu tun haben, im allgemeinen für die groben, trübenden, durch Dekantieren oder Filtrieren isolierbaren Teilchen gebraucht wird, während die feineren Zerteilungen, welche bei Tageslicht klar erscheinen und durch Filtrieren etc. nicht in ihre Komponenten zerlegt werden können, mit Rücksicht auf ihre äußerlich homogene Beschaffenheit von ihnen als Lösungen bezeichnet werden.

Als Beispiele mögen dienen die Bezeichnungen: suspensierte Kieselsäure, Zinnsäure, Tonerde und kolloidale Lösungen von Kieselsäure, Zinnsäure und Tonerde. Auch die letzteren enthalten zerteilte Kieselsäure etc., aber in viel vollkommener Zerteilung als die ersteren.

Mit Rücksicht auf die außerordentlich große Zahl von Lösungen, die den Lichtkegel deutlich sichtbar machen, also auch nicht vollkommen homogen sind, halten wir es für notwendig, dem Sprachgebrauch in oben angedeutetem Sinne Rechnung zu tragen.



II. Abschnitt. 1. Es wurde eine Methode zur Bestimmung von Teilchengrößen, die zwischen der Wellenlänge des Lichtes und den molekularen Dimensionen liegen, beschrieben. Die Methode beruht auf der Sichtbarmachung der Teilchen durch seitliche Beleuchtung und Ermittlung der in einem bestimmten Volumen enthaltenen Teilchenzahl, deren Gesamtmasse bekannt ist.

2. Es wurden die Fehlerquellen dieser Methode eingehend besprochen, ferner wurde ihr Einfluß auf das Endresultat der Größenbestimmung dargelegt.

3. Es wurde eine rasch durchführbare Methode zur ungefähren Ermittlung der Teilchengrößen aus den durch Schätzung erhaltenen Abständen beschrieben.

4. Es wurde gezeigt, daß man aus der Helligkeit der Beugungsscheibchen der beleuchteten Teilchen einen Rückschluß auf die Teilchengröße ziehen könne.

III. Abschnitt. 1. Nach einer einleitenden Betrachtung über die allgemeinen Eigenschaften der Rubingläser wurden in zwei Tabellen die Farben der untersuchten Goldgläser, das Verhalten derselben bei seitlicher Beleuchtung (auch im polarisierten Lichte), ferner der Goldgehalt und die Teilchengröße übersichtlich zusammengestellt.

2. Die Untersuchung ergab, daß die Farbennuance der Goldgläser nicht in erkennbarem Zusammenhange mit den Teilchengrößen steht.

3. Es gibt in einzelnen Rubingläsern und auch in kolloidalen Goldlösungen rot färbende Goldteilchen, welche kleiner sind, als die kleinsten nach unserer Methode sichtbar zu machenden Goldteilchen, also kleiner als  $4-7 \mu$ .

Es ist den Verfassern eine angenehme Pflicht, der Firma Carl Zeiß in Jena für die liberale Bereitstellung der Mittel zu dieser Untersuchung ihren besten Dank hiermit auszudrücken.

Jena, Oktober 1902.

(Eingegangen 13. Oktober 1902.)

## 2. Ein Volumometer für kleine Substanzmengen; von L. Zehnder.

Zu mineralogischen Untersuchungen wünschte Prof. v. Groth eine neue bequeme und doch möglichst exakte Methode der Dichtebestimmung für kleine Substanzmengen zu erhalten. Ich habe daraufhin das bekannte Volumometer in eine neue Form gebracht und glaube nunmehr einen Apparat konstruiert zu haben, der nicht nur den Mineralogen, sondern auch den Chemikern bei Dichtebestimmungen von Nutzen sein wird. Einige Vorversuche wurden mit von mir angegebenen Apparaten und unter meiner Leitung von H. Steinmetz im physikalischen Institut ausgeführt. Dieselben ließen mich hoffen, daß man mit der neuen Methode ganz brauchbare Resultate erhalten könne. Nachdem ich die Versuche selber an die Hand genommen hatte, kam ich durch dieselben schließlich zu der nachfolgend beschriebenen Konstruktion.

### Apparat.

Das Volumometer besteht im wesentlichen aus einem Quecksilberbarometer, in dessen luftverdünnten Raum der Körper (mit einer gewissen Luftmenge) gebracht wird, dessen Dichte zu bestimmen ist. Das etwa 95 cm lange Barometerrohr  $bb$  (Fig. 1) ist eine beiderseits offene Glasröhre, die oben durch einen eingeschliffenen Glasstöpsel  $s_1$  verschließbar ist und durch darüber stehendes Quecksilber abgedichtet wird. Unter diesem Stöpsel ist Raum für das von oben einzuführende Stöpselfläschchen  $f$ , das den zu untersuchenden Körper  $k$  enthält. Das Fläschchen ruht auf einem schwarzen Glaszeiger  $z$ , mit dem der Quecksilbermeniskus eben zur Berührung gebracht wird. Das Barometerrohr  $b$  taucht in ein langes, oben erweitertes, mit Quecksilber gefülltes Glasgefäß  $G$ , in welchem

es, soweit als notwendig, auf- und abgeschoben werden kann. Zur gröberen Einstellung jenes Quecksilbermeniskus wird das ganze Barometerrohr *b* im äußeren Gefäß *G* gehoben oder gesenkt. Zur feineren Einstellung dient ein in einer Führung mit sanfter Reibung verschiebbarer gläserner Regulierzapfen *r*, mit dem man durch Eintauchen in das Quecksilber den Quecksilbermeniskus in gewünschter Weise mit dem Zeiger *z* zur Berührung bringt.

Von der in das Barometerrohr durch das Fläschchen *f* hineingebrachten Luft kennt man nach vorherigem Kalibrieren die Volumina, man bestimmt außerdem während des Versuches ihre Temperaturen, und die auf ihr lastenden Drucke werden aus dem Barometerstand bez. aus der Quecksilbersäule ermittelt, die nach Einstellung des Meniskus auf den Zeiger *z* an der Quecksilberoberfläche *q* abgelesen wird. Zu diesem Zwecke ist das Barometerrohr *b* mit einer Millimeterteilung versehen in der Weise, daß der Zeiger *z* dem Nullpunkt der Teilung entspricht, und daß nur der untere Teil des Rohres von etwa 38—76 cm geteilt ist. Durch eine Lupe *L*<sub>1</sub> beobachtet man die Einstellung des Quecksilbermeniskus auf den Zeiger *z*, durch eine andere Lupe *L*<sub>2</sub> liest man den Teilstrich ab, bis zu dem das Barometerrohr in die Quecksilberfläche *q* eintaucht. Auf die übrigen Konstruktionseinzelheiten werde ich bei Besprechung der bezüglichen Versuche aufmerksam machen.

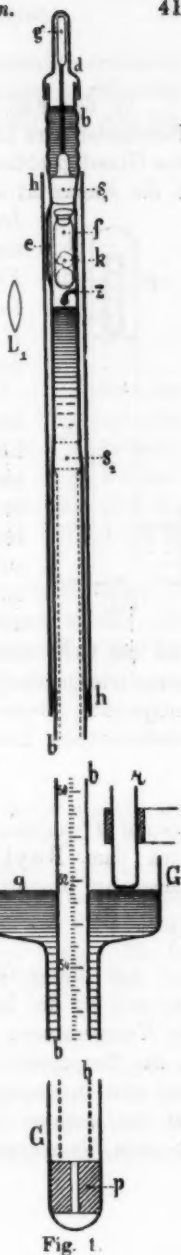


Fig. 1.

## Theorie.

In der Fig. 2 sei  $R$  das Volumen des Raumes in der Barometerrohre über dem Quecksilbermaniskus,  $G$  das Volumen des Glasstöpselfläschchens, dieses selber als Körper betrachtet,  $C$  die Kapazität dieses Stöpselfläschchens,  $S$  das Volumen der



Fig. 2.

festen oder flüssigen zu untersuchenden Substanz, also  $C - S$  das Volumen der mit dem Fläschchen in das Barometerrohr eingeführten Luft, und, wenn  $R - G = V$  gesetzt wird,  $R - G - S = V - S$  das Volumen, in das sich die eingeführte Luft ausdehnen kann.

Vor dem Einführen des Fläschchens in das Barometerrohr hat die in jenem eingeschlossene Luft das Volumen  $C - S$ , die zu messende Temperatur  $t$ , und sie steht unter dem Druck  $b$ , den wir mit dem Barometer bestimmen, unter Reduktion der abgelesenen Quecksilbersäule auf  $0^\circ$ . Nach dem Einführen des Fläschchens in das Barometer dehnt sich diese Luft aus auf das Volumen  $V - S$ , bei der Temperatur  $t_1$ , und sie steht unter dem Druck  $b - h_1$ , wenn  $h_1$  die auf  $0^\circ$  reduzierte Quecksilbersäule bezeichnet, die jenem Volumen  $V - S$  entspricht. Daher sind für  $\alpha$  als thermischen Ausdehnungskoeffizient der Luft:

$$\frac{C - S}{1 + \alpha t} \quad \text{und} \quad \frac{V - S}{1 + \alpha t_1}$$

die auf  $0^\circ$  reduzierten Volumina jener eingeführten Luft, die nach dem Boyle'schen Gesetz den bezüglichen Drucken umgekehrt proportional sind, woraus folgt:

$$(1) \quad \frac{C - S}{V - S} = \frac{(b - h_1)(1 + \alpha t)}{b(1 + \alpha t_1)}$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir den großen Vorteil, den wir für die Berechnung der Versuche erlangen, wenn wir die Temperaturen der Luft vor und nach ihrem Einführen in das Barometerrohr einander gleich zu machen vermögen, weil sich in diesem Fall die beiden entsprechenden Faktoren auf der rechten Seite unserer Gleichung wegheben. Eine absolute Temperaturgleichheit ist allerdings im allgemeinen

nicht möglich. Wir können aber die Temperaturunterschiede so gering machen, daß wir wenigstens in erster Annäherung bei der Berechnung jene Faktoren weglassen dürfen. Aus der Beziehung

$$\frac{C-S}{V-S} = \frac{b-h_1}{b}$$

erhalten wir dann die folgende:

$$\frac{C-S}{V-C} = \frac{b-h_1}{h_1}$$

und daraus:

$$(2) \quad S = C - \frac{(V-C)(b-h_1)}{h_1}$$

In dieser Gleichung sind  $C$  und  $V$ , also auch  $V-C$  Konstanten des benutzten Apparates, die durch vorher vorgenommene Kalibrierungen ein für allemal bestimmt werden. Wenn somit der Barometerstand  $b$  und die Quecksilbersäule  $h_1$  im Volumometer abgelesen und auf  $0^\circ$  reduziert sind, berechnet sich das Volumen  $S$  der betreffenden Substanz aus der Formel (2) in einfachster Weise.

Sind die Temperaturen  $t$  und  $t_1$  wesentlich verschieden, so muß  $S$  nach der genauen Formel (2a) berechnet werden, die sich aus Gleichung (1) ohne weiteres auf demselben Weg ergibt:

$$(2a) \quad S = C - \frac{(V-C)(b-h_1)(1+\alpha t)}{b\alpha(t_1-t) + h_1(1+\alpha t)}$$

### Kalibrierungen.

1. Die Kapazität  $C$  des Stöpselfläschchens ergibt sich aus Wägungen mit Quecksilber in bekannter Weise. Ich fülle das zuvor gut gereinigte Fläschchen mit reinem Quecksilber durch ein sehr feines, aus einer Glasröhre hergestelltes Trichterchen, sodaß das Quecksilber am Boden des Fläschchens einströmt und ganz langsam im Fläschchen steigt. Es ist hierbei Vorsicht geboten, weil leicht Luftbläschen an den Wandungen des Fläschchens hängen bleiben, die zu falschen Resultaten Veranlassung geben. Zeigen sich trotz aller Vorsicht beim Einfüllen solche Luftbläschen, so können dieselben mit einem feinen Eisendraht wieder entfernt werden. Ferner sind die außen am Fläschchen etwa hängen bleibenden, mit einer Lupe leicht zu beobachtenden Quecksilbertröpfchen sorg-

fältig zu entfernen. Unter Berücksichtigung der Quecksilber-temperaturen fand ich aus vier aufeinander folgenden Füllungen und Wägungen die Volumina:

0,30758, 0,30755, 0,30751, 0,30752 ccm

und daraus als Mittelwert die Kapazität des Fläschchens:

$$C = 0,30754 \text{ ccm.}$$

2. Das Volumen  $G$  bestimme ich durch Wägung des von dem geschlossenen Fläschchen  $f$  verdrängten Quecksilbers nach der Pyknometermethode. Zu diesem Zweck nehme ich ein etwas größeres Stöpselfläschchen, in das jenes zum Volumometer benutzte Fläschchen bequem eingeführt werden kann. Ein in der Apotheke erhältliches Salmiakfläschchen, an dessen Stöpsel ich den ins Innere ragenden Stiel abgebrochen und die Bruchfläche abgeschliffen habe, genügt vollständig. Nach sorgfältiger Reinigung fülle ich dasselbe durch den kleinen Trichter, wie unter 1. angegeben, von unten her mit reinem Quecksilber, verschließe und wäge es. Dann führe ich das zur Verhinderung eines zu starken Auftriebes fast ganz mit Quecksilber gefüllte, außen gut gereinigte kleinere Stöpselfläschchen  $f$  in jenes größere Stöpselfläschchen ein und nehme die zweite Wägung des Ganzen vor. Endlich wäge ich noch das Fläschchen  $f$  mit seinem augenblicklichen Quecksilberinhalt.

Das größere Stöpselfläschchen voll Quecksilber wog in drei Versuchen bei den Temperaturen  $t$

$t = 16,6^\circ$	$17,1^\circ$	$17,4^\circ$
54,3036	54,3006	54,3009 g

Nach Einführung des kleineren Stöpselfläschchens wog das Ganze:

$t = 17,1^\circ$	$17,15^\circ$	$18,0^\circ$
52,2368	52,2317	52,2242 g

Das größere Stöpselfläschchen wog leer 4,7139 g, das kleinere Stöpselfläschchen, nahezu voll Quecksilber, wog 4,6112 g. Daraus berechnet sich die Kapazität des größeren Stöpselfläschchens zu

3,65849, 3,65860, 3,65820, also im Mittel 3,65843 ccm

und nach dem Hinausdrücken von Quecksilber durch das kleinere Stöpselfläschchen  $f$  blieben zurück

3,16669, 3,16576, 3,16569, also im Mittel 3,16605 ccm.

Die Differenz der beiden Mittelwerte ergibt 0,49238 ccm als das äußere Volumen des Stöpselfläschchens  $f$ , dessen Kapazität zu 0,30754 ccm gefunden wurde, sodaß aus der Differenz dieser beiden Zahlen

$$G = 0,18484 \text{ ccm}$$

als Volumen des Stöpselfläschchens selber erhalten wird.

3. Um das Volumen  $R$  des Barometerrohres möglichst genau zu ermitteln, verfuhr ich in folgender Weise: Dem Barometerrohr  $b$  (Fig. 1) gab ich einen zweiten Schliff  $s_2$ , in den ein entsprechender an langem Glasstab angebrachter Glasstöpsel paßt. Das Barometerrohr wird genau vertikal aufgestellt und so auf den genannten Glasstab gestützt, daß der Schliff  $s_2$  quecksilberdicht wird. Nun wird der Raum des zuvor sorgfältig gereinigten Barometerrohres über dem Schliff  $s_2$  in der oben unter 1. beschriebenen Weise durch einen engen Trichter langsam mit reinem Quecksilber gefüllt, unter Vermeidung aller etwa an den Wänden haftenden Luftbläschen. Sodann wird der Stöpsel  $s_1$  langsam eingeschoben und fest eingedrückt. Durch ein dünnes Röhrchen wird das über dem Schliff  $s_1$  stehen gebliebene Quecksilber abgesaugt und werden alle an den Innenwandungen etwa hängen gebliebenen Quecksilbertröpfchen sorgfältig entfernt.

Nach dieser Vorbereitung wird der Stöpsel  $s_1$  wieder herausgezogen und es wird das über dem Zeiger  $z$  im Barometerrohr befindliche Quecksilber durch eine besondere Pipette aufgesaugt. Der hierbei zu benutzenden Pipette gab ich die nebenstehende Form  $P$  (Fig. 3). Die Pipette läuft links in eine ganz feine lange Kapillare aus, rechts hat sie einen Schlauchansatz. Die Kapillare wird in den auszumessenden mit Quecksilber gefüllten Raum  $R$  des Barometerrohres gebracht, und durch den Schlauch  $s$  — unter Einschaltung einer mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Trockenflasche  $F$  — wird das

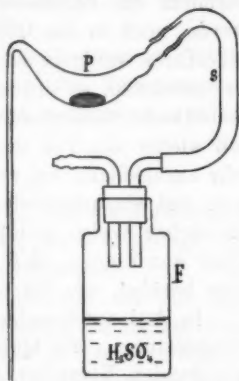


Fig. 3.

Quecksilber langsam in die Pipette aufgesaugt, in einfachster Weise mit dem Mund.

Mit Hilfe der hier zur Beobachtung der Berührung von Quecksilbermaniskus und Zeiger  $z$  (Fig. 1) angeordneten Lupe  $L_1$  kann diese Einstellung sehr genau gemacht werden. Viel schwieriger ist es offenbar, nicht zu viel und nicht zu wenig Quecksilber mit der Pipette abzusaugen. Namentlich ist das Absaugen einer zu grossen Quecksilbermenge störend, weil es in der Regel ziemlich schwierig ist, das zu viel angesaugte Quecksilber aus der Pipette ohne Verspritzen desselben wieder in das Barometerrohr zurückzubringen und mit der dort vorhandenen Quecksilbermenge zu vereinigen. Ich beobachtete deshalb das Sinken der Quecksilberoberfläche während des Ansaugens beständig, zuletzt durch die Lupe  $L_1$ . Wenn sodann der Zeiger  $z$  mit seinem oberen Teil aus dem Quecksilber herauszuragen beginnt, sauge ich nur noch ein Tröpfchen Quecksilber nach dem anderen auf. Bin ich der richtigen Meniskusstellung sehr nahe, so sauge ich die Tröpfchen einsteilen nur in die Kapillare der Pipette herein, in der sie einen längeren Quecksilberfaden bilden. Taucht dann der Zeiger  $z$ , nachdem das Barometerrohr mit dem Finger etwas geklopft wurde, noch in das Quecksilber ein, so sauge ich jenen Quecksilberfaden völlig in die Pipette herein. Ist dagegen der Zeiger frei geworden, so drücke ich den die Pipette mit der Schwefelsäureflasche verbindenden Schlauch  $s$  (Fig. 3) so weit zusammen, daß wieder ein Teil des Quecksilberfadens in das Barometerrohr zurückfließt, bei welchem Vorgang das Pipettenkapillarenende den einzustellenden Quecksilbermaniskus nahezu berührt. In solcher Weise gelingt es recht gut gerade so viel Quecksilber abzusaugen, daß der Quecksilbermaniskus den Zeiger  $z$  eben berührt, wie die folgende Versuchsreihe zeigen wird.

In drei aufeinander folgenden Versuchen fand ich bei den Temperaturen  $t$  die Quecksilbermengen  $Q$  und daraus die entsprechenden Volumina  $R$

$t$	17,9°	18,0°	18,1°
$Q$	17,0918	17,0847	17,0797 g
$R$	1,26125	1,26075	1,26040 ccm

Der Mittelwert, des gesuchten Volumens des Barometerrohres wird demnach:

$$R = 1,2608 \text{ ccm,}$$



wobei die Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert weniger als 0,4 pro mille betragen, ein wie mir scheint ganz bemerkenswertes Resultat für eine derartige Volumenbestimmung.

Es ist vielleicht nicht unnötig, nochmals zu betonen, daß für diese Kalibrierung das Quecksilber mit großer Vorsicht in das Barometerrohr einzuführen ist. Würde nämlich ein Luftbläschen in dem mit Quecksilber zu füllenden Raum des Barometerrohres zurückbleiben, so würde dasselbe beim Einsetzen des Stöpsels  $s_1$  zusammengepreßt, beim Öffnen des Stöpsels würde es sich wieder ausdehnen. Dasselbe würde ferner, wenn es unterhalb des Zeigers  $z$  sich befände, stärker zusammengepreßt durch die ganze bis zum Stöpsel  $s_1$  reichende als durch die verminderte nach Absaugen des Volumens  $R$  noch auf ihm lastende Quecksilbersäule. Es müßte also ein solches Luftbläschen beim Kalibrieren grobe Fehler im Gefolge haben.

Aus  $R = 1,2608$  ccm und  $G = 0,1848$  ccm finden wir  $R - G = V = 1,0760$  ccm, und da

$$C = 0,3075 \text{ ccm}$$

ermittelt wurde, wird

$$V - C = 0,7685 \text{ ccm,}$$

womit die beiden Konstanten des Apparates in unserer Formel bestimmt sind. Von einem Fabrikanten des Volumometers können diese Konstanten jedem Apparat mitgegeben werden.

#### Fehlerquellen.

1. Schon weiter oben habe ich gezeigt, daß die Berechnung der Versuche bedeutend vereinfacht wird, wenn es gelingt, die Temperatur der im Fläschchen eingeschlossenen Luft vom Einbringen der letzteren in das Barometerrohr bis zum Ablesen des von ihr erzeugten Druckes konstant zu halten, oder doch die Temperaturänderungen so klein zu machen, daß es sich bei ihrer Berücksichtigung nur um Korrekutionsrechnungen handeln kann. Zur Erreichung dieses Zieles muß vor allen Dingen die Quecksilbersäule des Barometerrohres  $b$  (Fig. 1) auf möglichst konstanter Temperatur erhalten werden. Daher wird der obere Teil des Barometerrohres mit einer genügend langen durchsichtigen Hülle  $h$ , nämlich mit einem dünnwandigen

Glasrohr umgeben, das vermittelt eines Pfropfes fest auf dem Barometerrohr sitzt.<sup>1)</sup> Ferner wurde die Lupe  $L_1$  derart gewählt, daß die Einstellung des Quecksilbermeniskus auf den Zeiger  $z$  in grösserem Abstand (von etwa 1 m) noch deutlich beobachtet werden kann. Die Vergrößerung ist dabei eine solche, daß sich recht scharfe Einstellungen machen lassen, wie aus den später folgenden Tabellen hervorgehen wird. Sodann ist das Barometerrohr oben, unmittelbar über dem Schliff  $s_1$ , in einen Halter von geringem Wärmeleitungsvermögen gefaßt, und nie darf dasselbe beim Heben und Senken mit der Hand angefaßt werden. Endlich besteht der Griff  $g$  des Stöpsels  $s_1$ , durch einen dünnen Stahldraht mit diesem verbunden, aus einem schlechten Wärmeleiter, nämlich aus einem dickwandigen ziemlich schweren Glasrohrstück, damit beim Einsetzen und Herausnehmen dieses Stöpsels eine möglichst geringe Wärmemenge dem Quecksilber des Barometerrohres zugeführt wird.

2. Wird nun das gut gereinigte und getrocknete Barometerrohr mit trockenem Quecksilber ganz gefüllt und nach eingesetztem Stöpsel  $s_1$  so weit aus dem Gefäß  $G$  herausgezogen, daß der obere Quecksilbermeniskus auf den Zeiger  $z$  einsteht, so wird man im allgemeinen bei  $q$  stets eine geringere Quecksilbersäule ablesen, als sie dem augenblicklichen Barometerstand entspricht. Denn das verwendete Quecksilber kann nicht ausgekocht oder sonst in irgend einer Weise luftfrei gemacht werden, und an den Innenwänden des Barometerrohres haftet stets Luft, die sich allmählich ablöst. Namentlich bleibt in dem Schliff  $s_1$ , auch wenn er möglichst fein ausgeführt und nach dem Schleifen noch poliert wird, immer eine merkliche Luftmenge zurück, die beim Heben des Barometerrohres in den Raum  $R$  gelangt. Eine Ablesung jener Quecksilbersäule kann uns also über den augenblicklichen Barometerstand immer nur annähernd Aufschluß geben; sie zeigt uns aber, ob grobe Fehler unterlaufen sind oder ob der Apparat tadellos funktioniert. Dementsprechend lehrt jene Ablesung allfällige Fehler erkennen, weshalb ich sie nie unterlassen, vielmehr stets vor bez. nach jedem Versuch vorgenommen

1) Schon bei der Kalibrierung 3 wurde dieser Wärmeschutz benutzt.

habe, obwohl sie bei der Berechnung der Versuche unberücksichtigt bleiben konnte.

3. Eine weitere analoge Fehlerquelle bringt die Einführung des Stöpselfläschchens in das Barometerrohr mit sich. Außer der im Fläschchen eingeschlossenen Luft dringt nämlich noch viel Luft in das Innere des Barometerrohres, die den Außenwänden des Fläschchens anhaftet, und besonders diejenige Luft, die im Schliff und unmittelbar über dem Schliff des Fläschchens im Augenblick des Eintauchens desselben in das Quecksilber gefangen wird. Um diese Luftmenge möglichst klein zu machen, habe ich das Stöpselfläschchen so konstruiert, wie es nebenstehende Fig. 4 in etwa dreifacher natürlicher Größe zeigt. Einspringende Höhlungen sind möglichst vermieden. Es ist nämlich der obere Rand des Fläschchens bei *ff* abgeschrägt und nach der Schlifffläche geschärft, wie aus der Figur hervorgeht.



Fig. 4.

Ein derart geformtes reines Fläschchen nimmt immer ungefähr die gleiche Luftmenge mit sich, und es kann demnach die gesamte Luftmenge, die teils in dieser Weise durch das Fläschchen mitgenommen wird, teils durch die unter 2. erwähnte Fehlerquelle in den luftverdünnten Barometerraum gelangt, als Korrektion durch den Versuch bestimmt werden. Zu diesem Zweck füllt man das Fläschchen fast vollständig mit einem Körper von bekanntem Volumen, am besten mit Quecksilber von bekannter Temperatur. Weil die Kapazität des Fläschchens bekannt ist, kennt man genau die in seinem Inneren dabei noch vorhandene Luftmenge. Durch Versuche mit dem Volumometer bestimmt man andererseits die Luftmenge, die im Barometerrohr tatsächlich erscheint. Die Differenz dieser beiden Luftmengen ist daher auf Rechnung der Luft zu setzen, die den unter 2. und 3. erwähnten Fehlerquellen entspricht, und sie ist bei den Berechnungen zum Körpervolumen  $S$  zu addieren.

4. Das Fläschchen führt man, wie später genauer erläutert wird, durch die obere Öffnung des Barometerrohres ein. Dabei wird aber das im Quecksilber untergetauchte Fläschchen stets

gegen die Wandung des Barometerrohres angedrückt und zwischen Rohr und Fläschchen wird eine beträchtliche Luftmenge gefangen. Diese Fehlerquelle suchte ich dadurch zu beseitigen, daß ich das obere Ende des Barometerrohres mit welligen Erweiterungen bez. Verengerungen versah, wie es die Fig. 1 zeigt. Durch diese Verengerungen wird die in soeben beschriebener Weise an der Außenwand des Fläschchens haftende Luft beim Einschieben des letzteren so gut als möglich abgestreift.

5. Würde beim Heben des Barometerrohres nicht alles Quecksilber aus dem Raum  $R$  des Rohres in die unterhalb des Zeigers befindliche Quecksilbermenge ablaufen, so würde dies zu entsprechenden Fehlern Veranlassung geben. Ich habe solche Fehler dadurch vermieden, daß ich den inneren Barometerrohrdurchmesser über dem Zeiger  $z$  etwas erweiterte, sodaß zwischen der Innenwand des Rohres und der Außenwand des Fläschchens noch genügende Querschnitte für das regelrechte Abfließen des Quecksilbers bleiben. Außerdem ordnete ich an der betreffenden Stelle eine furchenartige Erweiterung  $e$  (Fig. 1) an, durch die unter allen Umständen das Quecksilber leicht herabfließen kann, sodaß die erwähnte Störung sich nie geltend machte. Die Furche  $e$  darf aber vom Glasbläser nicht zu tief gegen den Zeiger  $z$  herabgezogen werden, damit das Glasrohr neben diesem Zeiger nicht zu ungleichmäßig wird; denn sonst würde man durch die Lupe  $L_1$  kein scharfes Bild des Zeigers  $z$  mehr erhalten.

6. Ist ein Versuch mit einer zu untersuchenden Substanz ausgeführt worden und macht man gleich nach dem Herausnehmen des Fläschchens ohne besondere Vorsichtsmaßregeln einen zweiten Versuch, so erhält man ein ganz schlechtes Resultat. Bei jenem ersten Versuch wurde nämlich eine größere Luftmenge in das Barometerrohr eingeführt. Diese Luft blieb beim Herausnehmen des Fläschchens zum Teil an den Innenwandungen des Barometerrohres haften und sie läßt die beim zweiten Versuche im Barometerrohr befindliche Luftmenge zu groß erscheinen. Namentlich bleibt an der Einschmelzstelle des Zeigers  $z$  stets ein kleines Luftbläschen zurück. Diese Fehlerquelle wird in genügender Weise beseitigt, wenn man nach jedem Versuch mit eingeführtem Fläschchen einen Versuch ohne Einführen desselben macht, das heißt wenn

man jeweils wieder die Quecksilbersäule des Volumometers ohne künstliche Lufteinführung, gleichsam zur Kontrolle, mit dem Barometerstand vergleicht. Dabei wird die erwähnte Luft frei. Sie expandiert in den luftverdünnten Raum  $R$  des Barometerrohres und beim darauffolgenden Senken des letzteren wird sie gegen den Schließ  $s_1$  hinaufgetrieben und nachher durch diesen wieder entfernt.

7. Von größter Wichtigkeit ist es, keine Spur von Wasserdampf in das Innere des Barometerrohres gelangen zu lassen. Ich habe deshalb nicht nur die zu untersuchenden Substanzen einige Stunden vor Beginn der Versuche in den Exsikkator gebracht, sondern auch das Fläschchen selber stets in letzterem aufbewahrt, unverschlossen, damit die Luft zum Inneren desselben freien Zutritt hatte. Das Fläschchen soll selbstverständlich nach dem Reinigen, also während der Versuche, nie mit den Fingern berührt und nie auf unreine Gegenstände gelegt, vielmehr nur mit reinen trockenen Pinzetten angefasst werden.<sup>1)</sup>

Das Heben des Quecksilbers im Barometerrohr geschieht nach Entfernen des Stöpsels  $s_1$  durch Ansaugen mit dem Mund, unter Zwischenschaltung einer konzentrierte Schwefelsäure enthaltenden Trockenflasche  $F$  (Fig. 3), damit nie feuchte Luft in den oberen Teil des Barometerrohres gelangt. Läßt man umgekehrt die Quecksilbersäule fallen, so soll die in das Barometerrohr eintretende Luft stets der Trockenflasche entnommen werden. Durch ein Schlauchstück wird man dabei die Trockenflasche mit dem oberen Teil des Barometerrohres verbinden. Dieses Schlauchstück muß aber so leicht über letzteren Teil zu stülpen sein, daß die solches besorgenden Finger keinen Augenblick weder mit dem oberen Rand des Barometerrohres selbst, noch mit dem über diesen Rand zu stülpenden Schlauchende zur Berührung kommen, weil sonst die wesentlich in Betracht kommende Quecksilbertemperatur in merklich störender Weise geändert wird (vgl. 1. p. 47).

---

1) Etwa dreimal glaubte ich meine Versuche abgeschlossen zu haben und faßte daraufhin das Fläschchen mit meinen allerdings ziemlich trockenen Fingern an. Nachher wollte ich noch weitere Körper untersuchen. Ich that dies ohne das Fläschchen von neuem zu reinigen oder anders als im Exsikkator zu trocknen. Größere Fehler scheinen sich aber aus diesen Berührungen nicht ergeben zu haben.

8. Der Schliff des Stöpselfläschchens *f* (Fig. 4) muß sorgfältig rein und namentlich staubfrei gehalten werden. Bleibt nämlich ein Staubkörnchen auf demselben liegen, etwa beim Einfüllen einer Substanz, so läßt sich das Fläschchen mit dem Stöpsel nicht mehr völlig verschliessen und die mit dem Fläschchen eingeführte Luftmenge ist zu groß. Um einen solchen Fehler zu erkennen, hole ich nach dem Verschließen das Fläschchen jedesmal an seinem Stöpsel mit der Pinzette aus dem Exsikkator heraus. Indessen waren zweimal so feine Stäubchen im Schliff sitzen geblieben, daß dieselben in solcher Weise nicht zu erkennen waren. Die in diesen beiden Fällen erhaltenen Drucke fielen weit aus der Reihe der sonst beobachteten Drucke heraus und die ganzen Versuchsreihen mußten verworfen werden. Nachdem ich aber auf diese Fehlerquelle aufmerksam geworden war, erkannte ich ihren Einfluß nachträglich daran, daß beim Senken des Barometerrohres durch den nicht gut schließenden Schliff etwas Quecksilber in feinsten Tröpfchen in das Innere des Fläschchens hineinspritzte, während bei gut geschlossenem Stöpsel nur die Luft selber durch den Schliff hindurch in das Fläschchen zurückströmen konnte.

9. Das Stöpselfläschchen muß in jeder Weise vor Verunreinigung geschützt werden (vgl. 7. p. 51). Denn feste und namentlich weiche klebrige Körper, die sich außen an das Fläschchen anlegen, werden bewirken, daß an den betreffenden Stellen ganz andere Luftmengen beim Eintauchen in das Quecksilber am Fläschchen haften bleiben und ins Innere des Barometerrohres gelangen, als es ohne diese Körper der Fall wäre. Deshalb wird das Stöpselfläschchen nur auf reine Glas-



Fig. 5.

schälchen gelegt. Ist es mit einer Substanz gefüllt, die bei geneigtem Fläschchen teilweise aus demselben herausfallen könnte, so stellt man es, namentlich im Exsikkator, in ein entsprechendes kleines, innen gereinigtes Ständerchen (Fig. 5), das der Luft freien Zutritt zum Fläschchen gestattet und das auch für das Stöpselchen *st* eine geeignete reine Aufbewahrungsstelle bietet (Fig. 5). Verhältnismäßig sehr nachteilig würden kleine Fäserchen von Fließpapier wirken, die außen an das Fläschchen sich anlegten, wenn man dieses auf Fließpapier

aufbewahren wollte. Denn längs solcher Fäserchen würde beim Eintauchen des Fläschchens in das Quecksilber ein Luftkanal gebildet, aus dem die Luft nicht mehr entfernt werden könnte. Diese Luft aber würde ins Innere des Barometerrohres gelangen und die abzulesenden Druckwerte entsprechend beeinträchtigen.

Nach jedem Versuche sitzt das Stöpselchen fest im Schliff des Fläschchens. Zur Sicherung der Luftdruckausgleichung habe ich (was kaum nötig ist) jenes aus diesem herausgezogen vor der Einbringung in den Exsikkator. Mit einer Pinzette hält man das Fläschchen fest, etwa in jenem Standgläschen, mit einer anderen Pinzette zieht man das Stöpselchen heraus.

Eine weitere Verunreinigungsgefahr für das Stöpselfläschchen bietet die Quecksilberoberfläche oben im Barometerrohr, durch die jenes in dieses eingeführt wird. Damit sich auf der Quecksilberoberfläche möglichst wenig Staub ablagert, wird dieselbe durch einen aufgesetzten Deckel *d* (Fig. 1) vor solcher Verunreinigung geschützt. Dieser Deckel kann teils über den Griff *g* des Stöpsels  $s_1$  geschoben werden, während des Versuches, teils kann er unmittelbar auf den oberen Teil des Barometerrohres aufgesetzt werden, nach Beendigung des Versuches. Anderenfalls hilft Absaugen der Verunreinigungen der Quecksilberoberfläche mit einer Pipette.

Vor der Anordnung eines solchen Schutzdeckels *d* habe ich übrigens in einem Zeitraum von nahezu zwei Monaten mit einem und demselben Stöpselfläschchen gearbeitet, ohne eine weitere Reinigung desselben vorzunehmen, als das Heraus-schütten der gebrauchten Substanz und das kräftige Ausblasen desselben mit dem trockenen Luftstrom eines Blasebalges.

Auch das Barometerrohr selber kann, wenn es nach den gegebenen Vorschriften vor Verunreinigung und namentlich vor Feuchtigkeit bewahrt wird, lange Zeit und zu zahlreichen Versuchen gebraucht werden, ohne daß eine neue Reinigung desselben erforderlich wäre. Ich habe im Lauf eines Monats das Volumometer ohne neue Reinigung zu mehr als 140 Versuchen gebraucht, wovon etwa die Hälfte unter Einführung des Fläschchens mit einer Substanz bez. mit Luft gemacht wurden. Zu diesen Versuchen zählen alle weiter unten mitgeteilten, ausgenommen die Versuche mit Bergkristall. Vor Ausführung



dieser letzteren, einen Monat später angestellten Versuche entleerte ich das Barometerrohr, ließ, ohne eine Reinigung mit Säure oder dergleichen vorzunehmen, trockene Luft durch dasselbe streichen und füllte es dann wieder mit getrocknetem Quecksilber. Mit dem Stöpselfläschchen nahm ich, wie schon oben erwähnt, nie eine besondere Reinigung vor, obwohl ich dasselbe mehrmals, im Glauben, nunmehr meine Versuche abgeschlossen zu haben, mit meinen Fingern angefaßt hatte. Trotzdem ergaben auch die mit Bergkristall ausgeführten Versuche ein recht brauchbares Resultat. Es darf daraus geschlossen werden, daß bezüglich der verlangten Reinlichkeit bei der Behandlung dieses Volumometers keine übermäßig großen Anforderungen gestellt werden. Denn es ist nicht schwer, die hier unter „Fehlerquellen“ besprochenen Vorsichtsmaßregeln zu beachten.

#### Gang der Versuche.

Das Glasgefäß *G* (Fig. 1 und Fig. 6) erhält in seinem unteren Ende einen hier festsitzenden Gummipfropf *p*, der in der Mitte ein enges Loch besitzt, vermittelt dessen er zum Zweck einer gründlichen Reinigung jenes Gefäßes wieder herausgenommen werden kann. Nun wird das Barometerrohr *b* (selbstverständlich ohne den nur zur Kalibrierung dienenden Glasstab mit Stöpsel *s*<sub>2</sub>) mit seiner Glashülle *h* in das zuvor mit reinem, trockenem Quecksilber gefüllte Gefäß *G* eingetaucht. Damit aber nur möglichst reines Quecksilber in das Innere des Barometerrohres gelange, verschließt man beim Eintauchen das untere Ende dieses Rohres mit einem reinen Gummiläppchen oder Papierstreifen, das erst nach dem vollständigen Untertauchen weggezogen wird. Das Barometerrohr wird nun so tief eingesenkt, daß es den Gummipfropf *p* eben leicht berührt. Sodann wird der zur Trockenflasche *F* führende Gummischlauch *s* vorsichtig über das obere Barometerrohrende gestülpt, nämlich so, daß dabei weder dieses Rohrende selber, noch derjenige Teil des Schlauches, der auf dasselbe zu sitzen kommt, mit den Fingern berührt wird (vgl. 7. p. 51). Nunmehr saugt man mit dem Mund durch die Trockenflasche hindurch das Quecksilber im Barometerrohr so hoch, daß dieses bis nahe zum oberen Rand mit Quecksilber gefüllt ist. Dann drückt



man das Barometerrohr fest auf den Gummipfropf  $p$ , sodaß das Quecksilber im Rohr abgeschlossen wird und in demselben stehen bleibt. Der an der Stange  $S$  vertikal verschiebbare Träger  $T$  des Barometerrohres hat ein so großes Gewicht, daß er in der Regel schon vermöge dieses Gewichtes einen genügenden Druck auf den Pfropf  $p$  ausübt, um jenen Abschluß zu bewirken. Sonst müßte dieser Druck durch ein angehängtes Gewicht entsprechend vermehrt werden.

1. Nach den beschriebenen Vorbereitungen und nach Ablesung des Barometerstandes wird die Temperatur des Quecksilbers im Volumeterrohr  $b$  gemessen durch Einsetzen eines im Exsikkator aufbewahrten kleinen Thermometers in den oberen Teil des Rohres. Dann wird der gleichfalls im Exsikkator aufbewahrte, nur an seinem Glasgriff  $g$  anzufassende Stöpsel in seinen Schliff  $s_1$  eingesetzt. Unter andauern-

dem Niederdrücken dieses Stöpsels wird das Rohr ohne direktes Anfassen nur an seinem Träger  $T$  hochgehoben, bis die Quecksilberoberfläche im Inneren wesentlich tiefer als zum Zeiger  $z$  gesunken ist, wodurch viel Luft von der Innenwand des Volumo-

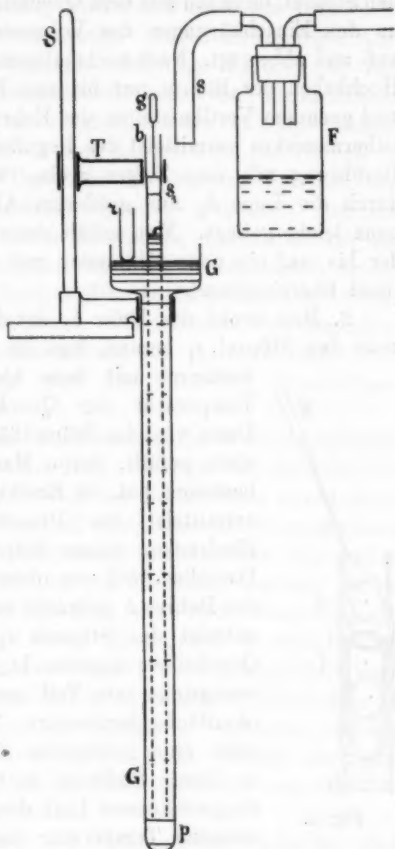


Fig. 6.

meterrohres abgelöst wird. Senkt man nunmehr das Rohr, drückt es auf den Pfropf  $p$  und öffnet den Stöpsel  $s_1$ , so steigt jene abgelöste Luft im Quecksilber nach oben, namentlich wenn man den Stöpsel, ohne ihn aus dem Quecksilber ganz herauszuziehen, an den Einschnürungen des Volumeterrohres vorbei etwas auf- und abbewegt. Nach nochmaligem Einsetzen des Stöpsels  $s_1$ , Hochheben des Rohres nur bis zum Freiwerden des Zeigers  $z$ , und genauem Vertikalstellen des Rohres stellt man den Quecksilbermeniskus vermittelst des Regulierzapfens  $r$  auf genaueste Berührung mit dem Zeiger  $z$  ein, was — bei Beobachtung durch die Lupe  $L_1$  aus größerem Abstand (vgl. 1. p. 47) — ganz leicht gelingt. Man erhält dann einen Quecksilberstand, der bis auf ein paar Millimeter mit dem wahren Barometerstand übereinstimmt.

2. Man senkt das Rohr  $b$ , drückt es auf den Pfropf  $p$ , zieht den Stöpsel  $s_1$  heraus, legt ihn in den Exsikkator und bestimmt mit dem kleinen Thermometer die Temperatur der Quecksilbersäule wie oben.<sup>1)</sup> Dann wird das Stöpselfläschchen, mit einer Substanz gefüllt, deren Masse man durch Wägung bestimmt hat, im Exsikkator selber verschlossen vermittelst der Pinzetten unter genügendem Eindrücken seines Stöpselchens (vgl. 8. p. 52). Dasselbe wird von oben her in das Quecksilber des Rohres  $b$  gebracht und durch Belastung vermittelst des Stöpsels  $s_1$  eben nur so weit im Quecksilber eingetaucht (Fig. 7), daß sein Schliff wenigstens zum Teil noch aus der Quecksilberoberfläche herausragt. Läßt man das Fläschchen eine genügende Zeit (mindestens 5 Min.) in dieser Stellung, so nimmt die in demselben eingeschlossene Luft die unmittelbar vorher gemessene Temperatur des Quecksilbers an und ihr Druck gleicht sich mit dem außen herrschenden Druck aus durch Überströmen von Luft in der einen oder in der anderen Richtung durch den absichtlich nicht übermäßig fein



Fig. 7.

1) Befolgt man diese Vorschriften und sorgt namentlich für gutes Aufdrücken des Rohres  $b$  auf den Pfropf  $p$ , so ist ein neues Ansaugen des Quecksilbers nie mehr nötig.

gearbeiteten Schliff des Fläschchens hindurch. Man kennt somit Temperatur und Druck der in das Volumometer einzuführenden Luft.

Nach dieser Bestimmung wird das Fläschchen mittelst des Stöpsels  $s_1$  völlig untergetaucht. Durch mehrmaliges Auf- und Abbewegen dieses Stöpsels wird das dadurch an den Einschnürungen des Volumometerrohres auf- und abgeschobene Fläschchen noch so gut als möglich von der an seiner Außenfläche haftenden Luft befreit und darauf wird der Stöpsel in seinen Schliff eingesetzt. Das Rohr wird langsam hochgehoben, der Quecksilbermeniskus dabei vorläufig eingestellt und der Apparat einige Zeit sich selber überlassen, damit die Luft aus dem Fläschchen durch seinen verschlossen bleibenden Schliff hindurchströmen kann. Nach 5 Min. ist ein genügender Druckausgleich zu stande gekommen. Vermittelst des Regulierzapfens  $r$  wird die feine Einstellung des Quecksilbermeniskus vorgenommen und hierauf wird der Stand der Quecksilberoberfläche  $q$  abgelesen.

Senkt man nach dieser Bestimmung das Volumometerrohr nicht zu schnell, so wird die Luft vermöge des zunehmenden Außendruckes durch den Schliff des Fläschchens hindurch in sein Inneres gedrückt, ohne daß dabei Quecksilber mitgerissen wird. Mit derselben Substanzmenge in demselben Fläschchen kann also der Versuch beliebig oft wiederholt werden. Sollte infolge ungenügenden Verschließens des Fläschchens (vgl. 8. p. 52) bei einem Versuch etwas Quecksilber in sein Inneres hineinspritzen, so kann durch Wägung diese Quecksilbermenge bestimmt und ihr Volumen bei allen folgenden Versuchen in leicht ersichtlicher Weise in Rechnung gebracht werden (vgl. 3. Zeile der Tab. 5 p. 66). Derjenige Versuch aber, bei dem zweifellos der Verschuß des Fläschchens ein ungenügender war, muß ausgeschlossen werden.

Nachdem das Rohr auf den Pfropf  $p$  aufgedrückt ist, wird der Stöpsel  $s_1$  herausgezogen. Durch seinen eigenen Auftrieb steigt das Stöpselfläschchen von selber hoch und erscheint oben an der Quecksilberoberfläche. Freilich geschieht dies gewöhnlich nicht sofort; vielmehr muß das Fläschchen meistens einige Male mit Hilfe des Stöpsels  $s_1$  an eine andere Stelle des Rohres geschoben werden, bis es steigt. Nur wenn man mit



Versuchsergebnisse.

Ich habe schon oben erwähnt, in welcher Weise ganze Versuchsreihen ausgeführt wurden. In der folgenden Tab. 1 ist eine solche Versuchsreihe mit ihren Ablesungen angegeben, die zur Dichtebestimmung des Bergkristalles diente. In derselben bedeuten:

- $t$  die zu den neben ihnen stehenden Quecksilberständen gehörenden Temperaturen, in Zentigraden;  
 $(b)$  die Quecksilberstände im Barometer;  
 $h$  " " " Volumometer ohne eingeführtes Fläschchen;  
 $h_1$  " " " mit eingeführtem Fläschchen (voll Bergkristall);  
 $h_1'$  die um die Kapillardepression vermehrten Quecksilberstände  $h_1$  des Volumometers, dieselbe beim Glasrohrdurchmesser von 0,45 cm auf 0,10 cm geschätzt;  
 $b_0$  die auf 0° reduzierten Barometerstände, aus den Beobachtungen  $(b)$  interpoliert;  
 $h_{01}$  die auf 0° reduzierten Volumometerstände  $h_1'$ ;  
 $b_0 - h_{01}$  die Differenzen dieser beiden Quecksilbersäulen, in Zentimetern.

Jeder Tabelle ist die Nummer der Versuchsreihe beigesetzt, auf die sie sich bezieht, chronologisch geordnet.

Tabelle 1. Nr. 7.

$t$		$h_1'$	$b_0$	$h_{01}$	$b_0 - h_{01}$
17,0	(b) 71,94	—	71,73	—	—
18,1	$h$ 71,81				
18,2	$h_1$ 58,08	58,13	71,73	57,95	13,78
18,6	$h$ 71,61				
18,7	$h_1$ 58,09	58,19	71,72	58,01	13,71
18,7	$h$ 71,60				
19,0	$h_1$ 58,02	58,12	71,72	57,94	13,78
18,8	$h$ 71,62				
19,0	$h_1$ 58,06	58,16	71,71	57,98	13,73
18,7	$h$ 71,61				
18,9	$h_1$ 57,98	58,08	71,71	57,90	13,81
18,7	$h$ 71,60				
19,0	$h_1$ 57,92	58,02	71,70	57,84	13,86
18,7	$h$ 71,60				
18,7	(b) 71,93	—	71,70	—	—

Setzt man die Zahlen der letzten beiden Kolonnen in die Gleichung (2) (p. 43) ein, so erhält man sofort das Volumen  $C-S$

der mit dem Fläschchen in das Volumometer eingeführten Luft und das Volumen  $S$  der eingeführten Substanz selber.

In dieser Tabelle möchte ich vor allen Dingen auf die vorzügliche Übereinstimmung der Ablesungen  $h$  aufmerksam machen. Diese Volumometerstände unterscheiden sich nicht mehr als höchstens um 0,02 cm voneinander, ein um so bemerkenswerteres Resultat, als doch jedesmal zwischen zwei solchen Versuchen (1.) ein anderer Versuch (2.) ausgeführt wurde, bei dem das Fläschchen mit der Substanz in das Innere des Volumometers gebracht wurde. Die schöne Übereinstimmung dieser Ablesungen, die auch aus den übrigen Versuchsreihen sich ergibt, beweist die Brauchbarkeit der angeordneten Regulier- und Ablesevorrichtungen für dieses Volumometer.

Viel weniger gut stimmen die Ablesungen  $h_1$ , nach Einführung des Fläschchens mit der Substanz, untereinander überein. Die Luftmenge also, die beim Eintauchen des Stöpsels  $s_1$  allein, namentlich unter Beobachtung der oben erwähnten Vorsichtsmaßregeln, mitgerissen wird, ist fast vollständig konstant. Von dem Fläschchen aber, mit seiner großen Oberfläche, an der trotz aller Vorsicht leicht Stäubchen, Papierfäserchen oder dergleichen hängen bleiben, und an welchem Fläschchen überdies einspringende Flächen, also Luftfänger, sich nicht vermeiden lassen, wird bald etwas mehr, bald etwas weniger Luft mitgerissen, die im Volumometer ungleichmäßige Ablesungen zur Folge hat. Zweifellos sind die großen Verschiedenheiten der Volumometerablesungen  $h_1$  bei eingeführtem Fläschchen im wesentlichen diesen ungleichen mitgerissenen Luftmengen zuzuschreiben.

Um die von diesen Luftmengen herrührenden Korrekturen zu ermitteln, habe ich analoge Versuchsreihen wie die oben beschriebene, zuerst nur mit luftgefülltem Fläschchen ausgeführt, ohne irgend eine andere Substanz. Ich erhielt die Ablesungen  $h$  der Quecksilberstände im Volumometer, bei eingeführtem Fläschchen, die zugehörigen Temperaturen  $t$  der eingeführten Luftmengen und die entsprechenden wie oben durch Interpolation berechneten bereits auf  $0^\circ$  reduzierten Barometerstände  $b_0$ , wie sie in der folgenden Tab. 2 ohne die dazwischen ausgeführten Kontrollversuche (1. p. 55) angegeben

sind. Zwischen der Einführung des Fläschchens in das Volumometer und der Ablesung des entsprechenden Quecksilberstandes verstrichen jeweils 10 Min. (vgl. Schluß der Tabelle).

Tabelle 2. Nr. 2.

$t$	$h$	$b_0$
17,6	50,55	71,42
17,5	50,55	71,40
17,1	50,60	71,38
16,8	50,58	71,36
17,0	50,57	71,35
17,0	50,61	71,35

10 Min.

Die Anfangstemperatur der Quecksilbersäule des Volumometers erhält man in genügender Annäherung aus der ersten Ablesung  $t$  des in den oberen Teil des Volumometerrohres eingetauchten Thermometers, wenn der Apparat vor Beginn der Versuchsreihe längere Zeit sich selber überlassen war. Nachher wird diese Temperatur sich ändern, sie wird im allgemeinen um so mehr steigen, je mehr man sich in unmittelbarer Nähe des Apparates zu schaffen macht. Um solche Einflüsse zu verhindern, habe ich die früher erwähnte Glashülle  $A$  (Fig. 1) um das Volumometerrohr  $b$  gelegt. Dennoch stieg bei meinen Versuchen die Temperatur des Quecksilbers langsam. Ich konstatierte dies an einem zweiten Thermometer, das ich in das Quecksilbergefäß  $G$  (Figg. 1 u. 6) eintauchte. Diese Temperatursteigerung ist aber eine geringe. Um die größtmögliche Genauigkeit der Resultate zu erzielen, wird man diese Veränderungen messen und in Rechnung ziehen. Bei den hier mitgeteilten Versuchen habe ich in dieser Beziehung das einfachste Berechnungsverfahren gewählt. Ich habe nämlich für alle Reduktionen der Volumeterablesungen  $h$  die aus allen zugehörigen Temperaturablesungen  $t$  (die sich doch wenig voneinander unterscheiden und fast nur zufälligen äußeren Einflüssen ihre Unterschiede verdanken) berechneten Mitteltemperaturen benutzt. Es entspricht sicher bei meinen Versuchen der Wirklichkeit am besten, wenn wir die Temperaturen der Quecksilbersäulen als nahe konstant betrachten. Dagegen besaß die im Fläschchen eingeführte Luftmenge stets nahezu die unmittelbar vor seinem Eintauchen im oberen Teil des Volumometerrohres abgelesene Temperatur  $t$  (laut Tabelle).

Für genaue Berechnungen müßte man daher die Formel (2a) (p. 43) anwenden, in der man zwar für  $t_1$  — als Temperatur (des Quecksilbers) im Volumometerraum  $R$  — jene Mitteltemperatur beibehalten könnte, wenn man nicht vorzieht, durch ein stets dort befindliches Thermometer diese Temperatur jedesmal zu messen; für  $t$  aber — als Temperatur im Fläschchen vor seinem Untertauchen — müßte man die wirklich gemessene für jeden Versuch in der Tabelle angegebene Einzeltemperatur einsetzen. Es wird sich aber zeigen, daß auch mit der hier allein durchgeführten angenäherten Berechnung nach der einfacheren Formel (2) sehr brauchbare Resultate erhalten werden.

Setzt man für die ohne andere Substanz als Luft im Fläschchen gefundene Versuchsreihe (der Tab. 2)  $S=0$  in die Gleichung (1) (p. 42) ein, so erhält man ein größeres Luftvolumen  $C'$ , als es der Kapazität  $C$  des Fläschchens entspricht. Mit den sechs Werten der Tab. 2 ergibt sich nämlich:

$$C' = 0,31517, 0,31496, 0,31399, 0,31409, 0,31413, 0,31352 \text{ ccm,}$$

während die Kapazität des Fläschchens nur  $C = 0,30754$  ccm beträgt. Die Differenz der beiden, also

$$c = 0,00763, 0,00742, 0,00645, 0,00655, 0,00659, 0,00598 \text{ ccm}$$

ist nichts anderes als das Volumen der im Schliff des Fläschchens und an der Außenwand desselben haftenden, beim Eintauchen mitgerissenen Luft, vermehrt um das Volumen der regelmäßig mit dem Stöpsel  $s_1$  eingeführten Luft.

Zur Bestimmung dieser Korrektur habe ich bei den soeben genannten Versuchen mit einer unnötig großen Luftmenge gearbeitet, was die Sicherheit der erhaltenen Werte beeinträchtigt. Aus diesem Grunde suchte ich später die Korrektur in der Weise zu bestimmen, daß ich das Fläschchen fast vollständig<sup>1)</sup> mit Quecksilber füllte, dessen Volumen bekannt ist. Wieviel Luft außer dem Quecksilber noch im Fläschchen sich befand, war also genau bestimmbar, und das als

1) Bei der ersten Beobachtungsreihe (Nr. 1) war das Fläschchen ganz voll Quecksilber, ließ sich aber wegen der Oberflächenspannung des Quecksilbers nicht fest verschließen, weshalb die betreffenden Resultate unbrauchbar sind.



Korrektion einzuführende Luftvolumen ließ sich sicherer ermitteln.

Als das Fläschchen nahezu voll Quecksilber war, erhielt ich die in der folgenden Tab. 3 angegebene Versuchsreihe, mit gleicher Bezeichnungsweise der Ablesungen wie oben:

Tabelle 3. Nr. 6.

$t$	$h$	$b_0$
17,4	71,06	72,11
17,6	71,06	72,10
17,3	71,08	72,09
17,4	71,18	72,08
17,4	71,11	72,07
17,8	70,98	72,06

5 Min.

Aus der durch Wägung bestimmten Masse des im Fläschchen befindlichen Quecksilbers und aus seiner Temperatur berechnete ich sein Volumen zu 0,30579 ccm, während die Kapazität des Fläschchens  $C = 0,30754$  ccm beträgt. Die Differenz 0,00175 ccm ist somit das Volumen der im Fläschchen eingeschlossenen Luft. Berechnet man aus den Werten der Tab. 3 das Volumen  $C - S$  der mit dem Fläschchen in das Volumometer eingeführten Luft, so erhält man die sechs Werte:

$C - S = 0,01234, 0,01224, 0,01191, 0,01070, 0,01136, 0,01268$  ccm.

Davon jene 0,00175 ccm subtrahiert, ergeben sich als Korrektionswerte die Volumina:

$c = 0,01059, 0,01049, 0,01016, 0,00895, 0,00961, 0,01093$  ccm

der von der Fläschchenaußenwand und vom Stöpsel  $s_1$  bei den verschiedenen Versuchen mitgerissenen Luft. Man erkennt aus diesen Werten, daß die von der Fläschchenaußenwand mitgerissene Luftmenge in der That stark variiert, nämlich um etwa 2 cmm, daß also dieser Umstand die Ungleichheiten in den Ablesungen  $h$  der Volumometerstände bei eingeführtem Fläschchen vollständig zu erklären im stande ist.

Es ist selbstverständlich, daß diese verhältnismäßig sehr große Korrektion unter gar keinen Umständen unberücksichtigt bleiben darf. Weil nun die Einstellungen und die Ablesungen der Volumometerstände an sich sehr genau sind, weil also die gefundenen Unterschiede fast ausschließlich auf

Rechnung der in ungleichen Mengen vom Fläschchen mitgerissenen Luft fallen, kann man die entsprechende Korrektur in folgender Weise vornehmen: Versuche mit einem Fläschchen, das nahezu voll Quecksilber ist, werden in größerer Zahl ausgeführt. Daraus bestimmt sich das Intervall, in dem die Werte der mitgerissenen Luft schwanken. Bei den Versuchsreihen zur Bestimmung des Volumens einer Substanz werden nun die verschiedenen möglichen Volumina der mitgerissenen Luft in verschiedener Weise als Korrektur eingeführt. Ist nämlich bei sonst gleichwertigen Versuchen mit derselben Substanz bald ein größeres, bald ein kleineres Luftvolumen im Volumometer gefunden worden, so kann man *nach Maßgabe dieser Unterschiede* jeweils ein größeres bez. ein kleineres Korrektionsluftvolumen in Anrechnung bringen. Dieses Verfahren ist gerechtfertigt, wenn die Korrektionsversuche mit dem Fläschchen nahezu voll Quecksilber in genügend großer Zahl ausgeführt werden. Denn es wird das Wahrscheinlichkeitsgesetz bei beiderlei Versuchsreihen (mit Quecksilber für die Korrektur bez. mit der zu untersuchenden Substanz) die gleichen Schwankungen ergeben. Ich habe in solcher Weise die gefundenen Korrekturen in den folgenden Tabellen zur Anwendung gebracht, obwohl jede meiner Versuchsreihen nur aus sechs Einzelversuchen besteht. Das schließliche Resultat, der Mittelwert aus allen Einzelversuchen bleibt bei genügender Anzahl der Versuche dasselbe, wenn man statt der gewählten Korrektionsart den Mittelwert aller Korrekturen als arithmetisches Mittel bestimmt und jedesmal das so gefundene Luftvolumen als Korrektur einsetzt.

Vergleicht man die Werte von  $c$  auf p. 62 mit den später gefundenen Werten p. 63, so erkennt man, daß in beiden Fällen die Schwankungen fast die gleichen sind. Wenigstens ist das Verhältnis der Korrektionsschwankung zur Korrektur nahezu konstant. Die absoluten Werte der Korrekturen sind aber in beiden Fällen um einige Kubikmillimeter verschieden. Ich habe für alle folgenden Berechnungen die zuletzt mit der Quecksilberfüllung gefundenen Korrektionswerte benutzt. Denn teils ergeben diese Bestimmungen zweifellos viel genauere Resultate, weil mit so viel kleineren Luftmengen gearbeitet wird, teils aber entsprechen die dabei gefundenen Korrekturen

wahrscheinlich im allgemeinen<sup>1)</sup> besser den Luftmengen, die bei den nunmehr zu besprechenden Versuchen wirklich mitgerissen wurden, weil beiderlei Versuchsreihen der Zeit nach einander näher standen. Wie ich weiter oben zeigte, sind nämlich die jeweils mitgerissenen Luftmengen von dem augenblicklichen Zustand der Fläschchenoberfläche und der Quecksilberoberfläche im oberen Teil des Volumometerrohres abhängig. Von einer allmählich zunehmenden Verunreinigung dieser beiden Oberflächen wird zum größten Teil der Unterschied von etwa 3 Kubikmillimetern herrühren, der aus den beiden Versuchsreihen Tabelle 2 und 3 hervorgeht. Für möglichst genaue Versuche ist es zweckmäßig, immer zuerst eine Korrekptionsreihe mit nahezu mit Quecksilber gefülltem Fläschchen (Tab. 3), dann eine Versuchsreihe mit der Substanz im Fläschchen (Tab. 1), und hierauf wieder eine Korrekptionsreihe (Tab. 3) auszuführen. Für die Genauigkeit der hier mitgeteilten Versuche genügt es dagegen — auch bei monatelang fortgesetzten Versuchen — jene Korrektionen ein für allemal zu bestimmen, falls man nur nach den gegebenen Vorschriften die Verunreinigungen möglichst zu vermeiden sucht.

Die in Tab. 1 bereits mitgeteilten Versuche mit acht kleinen im Fläschchen befindlichen Bergkristallen wiederhole ich in Tab. 4 in der abgekürzten Weise der Tab. 2 und 3:

Tabelle 4. Nr. 7.

$t$	$h$	$b_0$
18,2	58,03	71,73
18,7	58,09	71,72
19,0	58,02	71,72
19,0	58,06	71,71
18,9	57,98	71,71
19,0	57,92	71,70 5 Min.

Die Volumometerstände  $h$  müssen auf  $0^\circ$  reduziert werden. Wegen der langsamen Temperaturänderung des Quecksilbers im Volumometerrohr (p. 61) benutzte ich für diese Reduktionen einfach die Mitteltemperatur der in Tab. 4 unter  $t$  stehenden Werte. Setzt man die so reduzierten Werte von  $h$  für  $h_1$  und oben stehende Werte  $b_0$  für  $b$  in die Gleichung 2 (p. 43)

1) Vgl. dagegen namentlich Versuchsreihe Nr. 3, Tab. 7 und p. 70.

ein, so erhält man für die Volumina die sechs Werte der ersten Zeile von Tab. 5.

Tabelle 5.

0,1248	0,1259	0,1247	0,1255	0,1242	0,1284
+0,0098	0,0089	0,0099	0,0092	0,0103	0,0109
-0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007
$S = 0,1339$	0,1341	0,1339	0,1340	0,1338	0,1336 <i>com</i>

Die Abweichungen dieser Werte voneinander rühren größtenteils von den ungleichen Luftmengen her, die, wie oben gezeigt, an der Außenwand des Fäschchens hängen bleiben und mitgerissen werden. Die dadurch nötig werdenden Korrekturen entnehmen wir den aus der Tab. 3 sich ergebenden Werten  $c$ , und benutzen entweder den Mittelwert dieser Größen  $c$ , oder wir verteilen aus dem p. 64 angegebenen Grund die ungleichen Werte von  $c$  ausgleichend auf die aus Tab. 4 berechneten Volumina, proportional den Unterschieden der letzteren, in der Weise, wie die zweite Zeile der Tab. 5 erkennen läßt. In einem Vorversuch der hier besprochenen Versuchsreihe war etwas Quecksilber in feinsten Tröpfchen in das Fläschchen hineingespritzt dadurch, daß ein feines Stäubchen beim Verschließen des Fläschchens in seinem Schließ geblieben war (vgl. 8, p. 52). Ich habe die Gewichtszunahme des Fläschchens durch dieses eingespritzte Quecksilber nachträglich bestimmt und für das Volumen des Quecksilbers 0,7 cmm gefunden, welches Volumen als weitere Korrektur in der dritten Zeile der Tab. 5 in Rechnung gesetzt ist.

Die Gesamtmasse der verwendeten acht Bergkristalle betrug 0,3571 g. Für ihr Gesamtvolumen fand ich die oben berechneten Werte  $S$ . Das Verhältnis der beiden Größen ergibt für die Dichte die Zahlen

$$2,667, 2,663, 2,667, 2,665, 2,669, 2,673$$

und das arithmetische Mittel derselben

$$d = 2,667.$$

Würde man die Korrektur  $c$  nicht so, wie es oben geschehen ist, ausgleichend auf die Volumina verteilen, sondern vielmehr den Mittelwert von  $c$  in allen Fällen als Korrektur verwenden, so würden die Einzelwerte der gefundenen Dichte um einen entsprechend größeren Betrag voneinander abweichen; das arithmetische Mittel derselben würde aber nahezu

das gleiche Resultat ergeben, wie man aus den Zahlen der dritten Kolumne der Tab. 5 sofort ersieht.

Eine andere Versuchsreihe führte ich mit ganz kleinen Bergkristallstücken aus. Zu diesem Zweck zerschlug ich mehrere Kristalle mit Hammer und Amboß, sodaß ich über 120 Kristallsplitter in das Fläschchen hineinbringen konnte. Die Volumometerablesungen und Barometerstände dieser Versuchsreihe gibt Tab. 6:

Tabelle 6. Nr. 8.

$t$	$h$	$b_0$
17,7	59,81	71,78
18,5	59,29	71,72
18,8	59,80	71,72
19,0	59,25	71,71
18,9	59,19	71,71
18,7	59,20	71,70

5 Min.

Das Gesamtvolumen der verwendeten Bergkristallsplitter erhalten wir daraus nach analoger Berechnungsart zu 0,1544 ccm, und da für die Gesamtmasse derselben 0,4080 g gefunden wurde, wird hier die Dichte im Mittel

$$d = 2,642.$$

Nehmen wir aus dem oben und aus dem hier gefundenen Wert der Dichte das Hauptmittel  $d = 2,654$ , so zeigt sich, daß jene beiden Mittelwerte nicht ganz 5 pro mille vom Hauptmittel abweichen. In ihren Physikalisch-chemischen Tabellen geben Landolt und Börnstein als Mittelwert aus den bisherigen Beobachtungen  $d = 2,653^1)$ . Damit stimmt das von mir gefundene Hauptmittel sehr gut überein.

Indessen glaube ich, daß der aus den Tab. 4 und 5 sich ergebenden Dichte  $d = 2,667$  mehr Gewicht beigelegt werden muß, als dem später gefundenen Wert  $d = 2,642$ . Beim Zerschlagen der Bergkristalle sammelte ich nämlich die Splitter auf reinem Fließpapier. Nun blieben aber sicher an den 120 kleinen scharfkantigen Bergkristallsplittern viel mehr Papierfäserchen hängen, als an den 8 größeren Bergkristallen. Gelangten solche Fäserchen unbemerkt in das Fläschchen, so mußten sie das Volumen der Bergkristallstücke zu groß, die

1) H. Landolt und R. Börnstein, Phys.-chem. Tab. 2. Aufl. p. 140. Berlin 1894.

Dichte derselben also zu klein erscheinen lassen. Namentlich wird solches bei der zuletzt erwähnten Versuchsreihe der Fall sein. Zur Erzielung einer möglichst großen Genauigkeit hat man daher die zu benutzenden Körper durch geeignetes Waschen oder durch Ausblasen von Staub, Papierfäserchen und dergleichen zu reinigen.

Es ist gewiß bemerkenswert, daß mit diesem kleinen Volumometer, unter Berücksichtigung der notwendigsten Korrekturen, aber ohne besonders peinliche Temperaturkorrekturen, nahezu die gleichen Dichten erhalten werden, wie mit anderen ganz verschiedenen Methoden, die im allgemeinen größere Substanzmengen erfordern. Namentlich wird man versucht sein zu glauben, an den Oberflächen der zu bestimmenden Substanzen haften große Luftmengen, die im Volumometer bei der starken Luftverdünung sich ablösen. Das Volumen der Substanz müßte sich demnach zu klein, ihre Dichte zu groß ergeben. Hätten solche Vorgänge einen größeren Einfluß, so müßten sie sich ganz besonders bemerkbar machen bei den pulverisierten Substanzen mit ihren verhältnismäßig großen Oberflächen. Um den Betrag solcher Einflüsse zu erkennen, habe ich drei Versuchsreihen mit kristallinischem Zucker (Kandiszucker) ausgeführt. Bei der ersten Versuchsreihe (Tab. 7) verwendete ich zwei möglichst große Zuckerstücke, bei der zweiten Reihe (Tab. 8) über 100 kleine Splitterchen, bei der dritten endlich (Tab. 9) den fein pulverisierten Zucker. Ich fand die folgenden Werte:

Tabelle 7. Nr. 3.

$l$	$h$	$b_0$
15,1	56,01	71,51
16,0	56,07	71,53
16,4	55,98	71,55
16,0	55,97	71,56
16,6	56,11	71,57
16,7	55,88	71,58

Daraus das Gesamtvolumen:

$$S = 0,1031, 0,1035, 0,1026, 0,1024, 0,1036, 0,1014 \text{ ccm.}$$

Die Gesamtmasse war:  $M = 0,1645 \text{ g.}$

Daraus die Dichte: 1,596, 1,589, 1,603, 1,606, 1,588, 1,622.

Mittelwert der Dichte:  $d = 1,601.$

Tabelle 8. Nr. 4.

$t$	$h$	$b_0$
16,5	59,58	72,18
16,8	59,63	72,24
16,9	59,60	72,24
16,9	59,66	72,23
16,9	59,68	72,23
16,8	59,62	72,23 7 Min.

$S = 0,1539$  ccm,  $M = 0,2434$  g,  
 $d = 1,582$ .

Tabelle 9. Nr. 5.

$t$	$h$	$b_0$
17,8	57,81	72,19
17,6	57,90	72,20
17,4	57,88	72,20
17,1	57,98	72,20
17,1	57,91	72,21
16,9	57,89	72,21 5 Min.

$S = 0,1261, 0,1264, 0,1264, 0,1268,$   
 $0,1265, 0,1264$  ccm.

$M = 0,2004$  g, im Mittel  $d = 1,585$ .

Berücksichtigt man die sehr kleinen benutzten Substanzmengen, mit denen diese Bestimmungen ausgeführt worden sind (weniger als  $\frac{1}{4}$  g, bei der Versuchsreihe Tab. 7, die eine größere Abweichung zeigt, weniger als  $\frac{1}{6}$  g), so muß man die Übereinstimmung der einzelnen Mittelwerte der Dichten als eine genügende bezeichnen. Es geht aber weiterhin aus diesen Bestimmungen hervor, daß die neue Volumometermethode, auf pulverisierte Substanzen angewandt, brauchbare Resultate gibt. Denn der für pulverisierten Zucker gefundene Wert liegt zwischen den beiden anderen für ganz grobe bez. für sehr feine Zuckerkörner gefundenen Werten der Dichte. In keinem Fall aber erhält man mit der pulverisierten Substanz bei Beachtung der gegebenen Vorsichtsmaßregeln und besonders bei Einhaltung der vorgeschriebenen Zeit von 5 Min. für die Ausströmung der Luft aus dem Fläschchen in das Volumometerrohr wesentlich größere Dichten, als mit grobkörniger Substanz.

Allerdings muß hier noch auf einen Punkt aufmerksam gemacht werden. Die beiden Dichten, die sich aus den Tab. 8 u. 9 ergeben, stimmen weit besser untereinander überein, als mit dem aus Tab. 7 erhaltenen Wert, der etwa 1 Proc. größer ist als die beiden übrigen. Wahrscheinlich ist dieser letztere Wert zu groß und wir erkennen aus dieser Versuchsreihe doch einen Einfluß der Ablösung der Luft im Vakuum. Bei den beiden mit Bergkristall ausgeführten Versuchsreihen, die ganz brauchbare Dichten ergeben haben, wartete ich nämlich nur 5 Min. von der Einführung des Fläschchens bis zur Ablesung des Volumometerstandes  $h$ . Offenbar ist daher diese



Zeitdauer eine genügende. Wartet man länger, so lösen sich doch nach und nach zu große Luftmengen von den Substanzoberflächen ab und die erhaltenen Dichten werden zu groß. In der Tat habe ich bei der Versuchsreihe Tab. 7, die eine wesentlich größere Dichte ergibt, im Mittel 14 Min. von der Einführung des Fläschchens bis zur Ablesung des Volumometerstandes verstreichen lassen, bei der Versuchsreihe Tab. 8 nur 7, bei der Reihe Tab. 9 nur 5 Min. Diese Ungleichheiten rühren davon her, daß ich erst nach einigen Erfahrungen jene Wartezeiträume verkürzte, weil nach Ablauf von 5 Min. die Drucke sich gar zu langsam änderten. Es ist nämlich die Versuchsreihe der Tab. 7 der chronologischen Reihenfolge nach die dritte der vollständig durchgeführten Versuchsreihen und zugleich die erste, deren Resultate in dieser Arbeit überhaupt verwertet worden sind.

Nach einer früher veröffentlichten Methode der Dichtebestimmung (Auflösungsmethode) fand ich für die Dichte des Kandiszuckers  $d = 1,593^1)$ , während der Mittelwert obiger drei Versuchsreihen hierfür  $d = 1,589$  ergibt, einen um 2,5 pro mille kleineren Wert. Nun glaube ich zwar, daß die hier veröffentlichte Volumetermethode genauere Resultate liefert als jene Auflösungsmethode. Dennoch kann möglicherweise der wahre Wert der Dichte des Kandiszuckers größer sein als 1,589. Denn allen Korrekturen für die Versuche mit Zucker habe ich die größeren Werte der Tab. 3 (mit Quecksilber im Fläschchen) zu Grunde gelegt, nicht die aus Tab. 2 sich ergebenden kleineren Werte (mit Luft im Fläschchen). Der Zeit nach fallen aber alle Versuche mit Zucker (Nr. 3, 4 und 5) zwischen die beiden Korrektionsversuchsreihen der Tab. 2 und 3 (Nr. 2 und Nr. 6), welche ein mit der Zeit zunehmendes Mitreißen von Luft durch das allmählich stärker verunreinigte Fläschchen andeuten. Daher sind wahrscheinlich die bei der Berechnung der Beobachtungen der Tab. 7 bis 9 zu Grunde gelegten Korrekturen zu groß. Es müßten Mittelwerte zur Korrektion benutzt werden, die zwischen den aus den Tab. 2 und 3 gefundenen Werten von  $c$  liegen. Dementsprechend würden die aus den Tab. 7 bis 9 sich ergebenden Dichten des Kandiszuckers größer ausfallen.

1) L. Zehnder, Wied. Ann. 29. p. 249. 1886.



Es ist also wohl berechtigt, wenn zur Erzielung größerer Genauigkeit vor und nach der Versuchsreihe mit der zu bestimmenden Substanz eine Korrekptionsreihe mit dem Fläschchen nahezu voll Quecksilber verlangt wird (Tab. 3), zur sicheren Ermittlung der Korrektion für die durch das Fläschchen mitgerissene Luft. Denn diese Korrektion ist ihrem absoluten Betrag nach eine sehr bedeutende. Übrigens hoffe ich durch feineres Auspolieren der roh geschliffenen Flächen *ee* und *ff* (Fig. 4, p. 49) des mehr oder weniger improvisierten, zu meinen Versuchen dienenden Fläschchens diese Korrektionen ihrem absoluten Betrage nach herunterbringen zu können. Zur exakteren Temperaturmessung im Raume *R* (p. 42) kann man den Stöpsel *g s*<sub>1</sub> (Fig. 6) als Thermometer ausführen, dessen Quecksilbergefaß unterhalb des Schliffes *s*<sub>1</sub> in den Raum *R* hineinragt.

Durch die hiermit veröffentlichten Versuchsergebnisse glaube ich gezeigt zu haben, daß die neue Volumometermethode vor anderen Methoden der Dichtebestimmung gewisse Vorteile besitzt:

1. Mit geringen Substanzmengen (Bruchteile eines Grammes) werden verhältnismäßig große Genauigkeiten erzielt.
2. Die Substanzen werden während der Versuche mit keiner Flüssigkeit zur Berührung gebracht.
3. Die mit pulverisierter und mit körniger Substanz erhaltenen Versuchsergebnisse unterscheiden sich kaum voneinander.

Allerdings müssen die Calibrierungen, welche die Konstanten des Apparates ergeben, mit größerer Sorgfalt ausgeführt werden. Alle anderen Messungen aber sind einfach und leicht. Jeder Einzelversuch mit Kontrollversuch ist bequem in einer halben Stunde zu beendigen. Volumometer und Versuchsfläschchen sind bei guter Behandlung ohne neue gründliche Reinigung einen oder ein paar Monate gebrauchsfähig, weil keinerlei Fett zur Abdichtung der Schliffe verwendet wird. Ich glaube deshalb, daß diese Volumometermethode nicht nur für Physiker, sondern auch für Chemiker und für Mineralogen zu Dichtebestimmungen vorzüglich sich eigne.

München, Physik. Inst. d. Univ., Oktober 1902.

(Eingegangen 12. Oktober 1902.)

**3. Das Entwicklungsgesetz  
des Hittorfschen Kathodendunkelraumes;  
von H. Ebert und P. Ewers.**

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung und den Schluß einer in diesen Annalen schon vor drei Jahren (1899) von einem von uns veröffentlichten ersten Untersuchung<sup>1)</sup> über den genannten Gegenstand. Sie bringt das Belegmaterial für die Gültigkeit der früher (p. 212) aufgestellten einfachen gesetzmäßigen Beziehung zwischen dem Gasdrucke  $p$  und der Dicke  $d$  des Dunkelraumes

$$(I) \quad d \cdot p^m = d_0 = \text{konst.}$$

auch für andere Gase als Sauerstoff, für den schon früher zwei Messungsreihen in extenso mitgeteilt worden waren, sowie eine Prüfung für verschiedene Formen der Kathode. Bemerkt sei schon im voraus, daß sich das genannte Gesetz seither in allen Fällen durchaus bewährt hat.<sup>2)</sup> Unterdessen sind auch von den Hrn. N. Hehl<sup>3)</sup> und O. Lehmann<sup>4)</sup> diesbezügliche Messungen angestellt worden.

Herr Lehmann spricht seinen Messungen wegen einer Unvollkommenheit in der Druckmessung nur den Charakter von Vorversuchen zu; sie ergaben indessen bei genügender Stromstärke Zahlenwerte, welche sich dem genannten Gesetze ein-

1) H. Ebert, Wied. Ann. **69**. p. 200. 1899.

2) Eine vorläufige Mitteilung über eine Reihe der im folgenden wiedergegebenen Messungsergebnisse findet sich in den Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **2**. p. 99. 1900.

3) N. Hehl, Sitzungsber. d. phys.-med. Soc. Erlangen **33**. p. 170. 1901; auch als Inaug.-Diss. Erlangen 1901 erschienen; ein Auszug der Arbeit: Phys. Zeitschr. **3**. p. 547. 1902.

4) O. Lehmann, Verhandl. d. naturwissensch. Ver. zu Karlsruhe, **15**. 1902.

ordnen lassen; große Abweichungen zeigten sich dagegen bei sehr geringen Stromstärken (l. c. p. 12).

Was den letzteren Punkt anbelangt, so wurde schon im ersten Teile der vorliegenden Arbeit (p. 202) hervorgehoben, daß sich die Dicke des dunklen Raumes mit der Stromdichte an der Kathode ändert, und zwar in *dem* Sinne, daß bei tieferen Drucken der Dunkelraum mit abnehmender Stromstärke stark wächst und mit zunehmender Stromesintensität sich auf ein ganz bestimmtes, nur noch vom Gasdrucke und der Gasnatur abhängiges *Minimum* zusammenzieht. Diese Verhältnisse sind unterdessen von Hrn. O. Lehmann selbst l. c. auch quantitativ genauer verfolgt worden. Die von ihm in Fig. 1 und 2 p. 15 und 16 gegebenen Curven lassen diese Abhängigkeit deutlich erkennen. Um bei unseren Messungen möglichst einfache Verhältnisse zu haben und um von diesem Einfluß der Stromstärke frei zu werden, haben wir, wie schon früher (vorige Arbeit p. 203), immer mit verhältnismäßig hohen Stromstärken gearbeitet und ferner den benutzten Gleichstrom-Wechselstromumformer so einreguliert, daß er bei der zur Unterhaltung der Entladungen notwendigen effektiven Spannung immer fast die gleiche Stromstärke im Hochspannungswechselstromkreise lieferte. Die verwendeten Stromstärken liegen alle zwischen 12 und 17 Milliampères. Da wir ferner mit den Drucken fast nie auf 0,10 mm herabgegangen sind, so liegen die für unsere Versuche geltenden Kurven für den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Dunkelraumdicke alle weit unterhalb der von Hrn. O. Lehmann in den genannten Figuren dargestellten, welche diesen Zusammenhang für Drucke zwischen 0,01 und 0,05 mm darstellen. Greift man hier das zwischen  $i = 12$  und  $i = 17$  Milliampère liegende Kurvenstück heraus, so sieht man, daß es selbst für  $p = 0,05$  völlig geradlinig ist, d. h. daß die Änderungen von  $d$  mit  $i$  bei unseren Versuchen in der Tat eliminiert waren. Dazu kommt noch, daß die von Hrn. O. Lehmann als Elektrode verwendete Kugel 7 cm, die unsrige nur 1 cm Durchmesser besaß, das von ihm verwendete ebene Drahtnetz 32 cm, die von uns benutzten Platten aber nur 1,4 bis 2,8 cm Durchmesser hatten, sodaß hier die Stromdichten, auf die es dabei ankommt, sehr erheblich viel größere waren. Somit wird durch die wertvollen Untersuchungen des Hrn. O. Lehmann über

diesen Punkt die von uns gemachte Voraussetzung wiederum bestätigt, daß es bei unserer Versuchsanordnung gelungen war, den Einfluß der Stromstärke ganz zu eliminieren.

Hr. Hehl erhebt gegen die Verwendung des Wechselstromes das Bedenken (p. 172 u. 195), daß die den zu verschiedenen Zeiten vorhandenen verschiedenen Stromstärken entsprechenden Dunkelraumdicken sich übereinander lagern müßten, der dunkle Raum also während einer Stromperiode von einer maximalen Ausdehnung allmählich zur minimalen erst abnehmen und dann steigen müßte. Wäre dies der Fall, so müßten die Grenzen zwischen den einzelnen Kathodenschichten bei Anwendung von hochfrequentem Wechselstrom oder allgemein von elektrischen Schwingungen unscharf und verwaschen erscheinen; aber gerade der außerordentliche Glanz der leuchtenden Schichten und ihre überaus scharfe Abgrenzung gegen die dunkle, zweite Schicht war es, die uns diese Stromform wählen und beibehalten ließ. Der Grund dafür, daß die genannte Änderung der Dunkelraumdicke mit der Stromstärke hierbei nicht von störendem Einflusse sein kann, ist ein sehr einfacher; die Entladung setzt ja nicht ein von dem Momente an, in welchem sich Spannung und Stromstärke eben von ihrem Nullwerte erheben, sondern erst nachdem die Spannung einen Wert von einigen Hundert Volt erreicht hat. Der eine von uns hat bei früherer Gelegenheit eingehender untersucht<sup>1)</sup>, welche Phasendifferenzen zwischen Spannung und Strom bei verschiedenen Entladungsröhren eintreten können und wovon dieselben abhängen, und an einer anderen Stelle gezeigt<sup>2)</sup>, wie man sich mittels der Braunschen Kathodenröhre von dem zeitlichen Verlaufe von Stromstärke und Spannung zugleich Rechenschaft geben kann. Diese Methode auf den vorliegenden Fall angewendet zeigt, daß in der Tat die Stromstärke kaum variiert während der kurzen Zeit, während der die Spannung oberhalb des Wertes liegt, der nötig ist, um die Entladung durch das Gas hindurch zu treiben. Damit wird das genannte Bedenken gegenstandslos; in der Tat findet ja Hr. Hehl mit der Hochspannungsbatterie das eingangs erwähnte Gesetz auch bei nicht ganz bedeckter Kathode vollkommen bestätigt (p. 193 u. 202).

1) H. Ebert, Wied. Ann. 65. p. 787. 1898.

2) H. Ebert, Wied. Ann. 64. p. 240. 1898.

Um auch sonst immer unter möglichst vergleichbaren Bedingungen zu arbeiten, wurde das Druckintervall, über welches die Beobachtungsreihen ausgedehnt wurden, nicht zu weit, namentlich nicht zu den allertiefsten Drucken hin erweitert; denn bei diesen liefert bekanntlich das Druckmanometer unzuverlässige Werte, außerdem wurde bei tiefen Drucken für alle Gase durch die Spannungs- sowie die Dickenwerte eine während der Entladung selbst fortschreitende Veränderung des Gasinhaltes angezeigt. Ebenso war die obere Grenze der zu verwendenden Drucke durch den Moment festzulegen, in welchem sich die Kathodenoberfläche eben ganz mit den drei Kathodenschichten vollkommen bedeckt hatte; vorher wachsen die Dicken der zweiten, dunklen Schicht unverhältnismäßig rasch mit abnehmendem Drucke; ein *allseitiges* gleichmäßiges Sichabheben aller Schichten von der Elektrodenoberfläche findet erst von dem genannten Momente an statt. Hierdurch wird freilich der durch die Messungen garantierte Gültigkeitsbereich des Gesetzes etwas enger umgrenzt; aber auf eine gesetzmäßige Beziehung zwischen zwei Größen  $p$  und  $d$  kann überhaupt doch nur so lange gerechnet werden, als der Körper, auf den sie sich bezieht, in seinen wesentlichen Eigenschaften identisch mit sich selber bleibt.

Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde zur Erregung der Entladung derselbe hochfrequente und hochgespannte Wechselstrom wie früher gewählt. Als wesentlichen Vorteil dieser Erregungsart müssen wir die außerordentliche *Konstanz* dieser Elektrizitätsquelle, sowie die *genaue Meßbarkeit* aller den Entladungsvorgang begleitenden Erscheinungen hervorheben. Denn nicht nur läßt sich die effektive Stromstärke, die effektive Spannung, die konsumierte Energie, die Zahl der einzelnen Entladungen pro Sekunde mit völliger Sicherheit messen, sondern es läßt sich auch der *zeitliche Verlauf* der ganzen Erscheinung, und mittels der Braunschen Röhre die Form des Stromverlaufes, das Ansteigen der Spannung etc. auf das genaueste analysieren; wie dies im einzelnen geschieht und mit welchen Meßinstrumenten ist bei früheren Gelegenheiten eingehend erörtert worden.<sup>1)</sup>

1) In seinem vor kurzem erschienenen Buche „Die Elektrizität in Gasen“ beurteilt Hr. J. Stark (p. 7) die von uns angewendete Methode

Einen Nachteil hat die Wechselstrommethode scheinbar, nämlich, daß sich bei ihr an derselben Elektrode für das Auge Anoden- und Kathodenerscheinung übereinanderlagern. Dies könnte zu Verwechselungen Veranlassung geben bei Gasen, bei denen, wie z. B. bei Stickstoff, das Licht der ersten Kathodenschicht, das sog. Kanalstrahlenlicht, in der Farbennuance dem Anodenlichte sehr nahe kommt. In diesen Fällen wurde durch einen, durch einen kleinen Elektromotor getriebenen Rotierspiegel (der gelegentlich auch direkt auf die Achse des zur Erzeugung der Gasentladungen benutzten Gleichstrom-Wechselstromumformers aufgesetzt wurde) die ganze Erscheinung auseinander gelegt; die Tourenzahl konnte durch Widerstände so einreguliert werden, daß bei völligem Synchronismus die Erscheinung völlig still stand. Dann konnte genau festgestellt werden, welches Lichtgebilde zur Anoden-, welches zur Kathodenerscheinung gehöre. Bei den meisten Gasen tritt schon bei verhältnismäßig hohen Drucken die Anodenerscheinung fast ganz zurück, jedenfalls bedeckt das Anodenlicht fast nie die ganze Platte, sondern sitzt auf einem Punkte derselben auf, sodaß eine Verwechselung mit der die ganze Platte bedeckenden ersten Kathodenschicht bei einiger Aufmerksamkeit ausgeschlossen ist.<sup>1)</sup>

Als Elektroden wurden bei den folgenden Messungen verwendet:

1. Die schon früher benutzte *kleine Aluminiumplatte* von 1,0 cm Radius und 0,052 cm Dicke.

des hochgespannten Wechselstromes in sehr abfälliger Weise. Er weist zunächst darauf hin, daß das *Induktorium* für reine und messende Versuche durchaus ungeeignet ist, worin wir ihm vollkommen beipflichten, fährt dann aber unmittelbar fort: „Was für das Induktorium gilt, das gilt in der Hauptsache auch von dem Transformator für hochgespannten Wechselstrom“, und zitiert in diesem Zusammenhang den einen von uns (Ebert). Hr. Stark hat sich augenscheinlich nicht die Mühe genommen, die von ihm in dieser Weise kritisierte Methode selbst zu prüfen. Wir müssen auf Grund unserer mehrjährigen Erfahrungen mit diesem Hilfsmittel eine derartige, durch nichts begründete Kritik entschieden zurückweisen.

- 1) Bemerkenswert ist, daß die Schichtung des Kathodenlichtes eine nicht unbeträchtliche Zeit zu ihrer Ausbildung braucht, vgl. auch O. Lehmann, l. c. p. 87.

2. An dem gleichen dicken Stiele eine größere Platte von 1,40 cm Radius, d. h. nahezu doppelt so großer Fläche ( $13,0 \text{ cm}^2$ ) und derselben Dicke.

3. Eine Platte von 0,69 cm Radius und 0,05 cm Dicke, deren gesamte Oberfläche von  $3,2 \text{ cm}^2$  gerade so groß war, wie die folgende Kugel; sie war, wie diese, an einer sehr dünnen Zuleitung befestigt; Platte 2 war also die *größte*, Platte 3 die *kleinste* der verwendeten Plattenelektroden; das Verhältnis der Oberflächen ist nahezu das von 4:1.

4. Die massive Aluminiumkugel *K* Fig. 1 von 0,506 cm Radius; sie war an einem dünnen Aluminiumdrahte *d* von 0,1 cm Dicke befestigt, der oben in der Mitte des dicken als Stromzuleitung dienenden Messingstabes (*b* in Fig. 1 des ersten Teiles p. 204) eingelassen war. Um den Draht war ein dünnes Schutzrohr *rr* aus Glas gelegt, welches unten dünn ausgezogen war, sodaß nur ein äußerst kleiner Teil ( $0,025 \text{ cm}^2$ ) der gesamten Kugeloberfläche bedeckt war. Bei der Berechnung der Volumina der Dunkelräume ist das diesem Querschnitt und der jeweiligen Dicke des Dunkelraumes entsprechende kleine Zylindervolumen in Abzug gebracht. Die andere Elektrode bildete wie früher der an einem dicken Messingstiele, der gleichfalls von einem Glasrohre umschlossen ist, getragene Ring *f* aus Aluminiumblech.



Fig. 1.

So konnten die Dunkelraumdicken an plattenförmigen Elektroden von dreierlei verschiedenen Größen, sowie an verschiedenartig gestalteten Elektroden (Kugel und Platte), aber von gleicher Oberfläche, für dieselben Drucke bei den einzelnen Gasen miteinander verglichen werden (wobei die Wände des Entladungsraumes immer sehr weit bei allen Elektrodenformen entfernt waren); ebenso war der Einfluß dickerer oder dünnerer Zuleitungen kontrollierbar.

Befestigt man die Platten an dem dicken Stiele, wie er früher benutzt wurde, so erhält die Elektrode zwei ein-



springende Winkel. In diesen ist die Dicke des Dunkelraumes geringer, worauf Hr. O. Lehmann schon früher hinwies.<sup>1)</sup> Die angeführten Messungen zeigen, daß dabei auch diejenigen Teile dieses Raumes eine Dickenverminderung erfahren, welche entfernteren Stellen der Elektrodenplatte anliegen. Erst bei größeren Dicken, von dem Momente an, in welchem das Einspringen des Glimmlichtes unmerklich wird, hört dieser vermindernde Einfluß auf und die Dicken wachsen rascher und zwar in einem Maße, als ob diese Störungsquelle nicht vorhanden wäre. In der Tat setzen die Reihen mit der dünnen Zuleitung die Messungswerte, welche bei niedrigen Drucken mit der dicken Zuleitung gewonnen wurden, fast ohne jede Diskontinuität nach der Seite der höheren Drucke hin fort.

Für die Messungen sind die plattenförmigen Elektroden, die hochkant betrachtet werden, vorteilhafter, weil sich hier die leuchtenden Teilchen in größerer Tiefe hintereinander lagern, die Schichten sich also deutlicher gegeneinander abheben. Bei der Kugel ist dies nicht in dem Grade der Fall und daher verschwimmen die Grenzen, namentlich die äußere Grenze der innersten Schicht, schon bei verhältnismäßig hohen Drucken. Den verschiedenen Graden der Deutlichkeit der Schichtung des Kathodenlichtes entsprechend empfiehlt es sich nicht, immer mit derselben Vergrößerung des auf der Teilmaschine montierten Fernrohres (vgl. frühere Arbeit p. 207) zu beobachten. Die Messungen wurden daher nur bei den höheren Drucken mit dem schon früher benutzten Fernrohre von 15 facher Vergrößerung ausgeführt. Neben diesem war ein zweites, nur 2,7 fach vergrößerndes, sehr lichtstarkes Fernrohr auf dem Schlitten der Teilmaschine befestigt, und endlich wurde bei den tiefsten hier benutzten Drucken mit einer einfachen Diopterröhrung, die dicht an die Flasche herangebracht wurde, mit bloßem Auge beobachtet.

Außer der Dicke  $d$  der Dunkelräume war auch das Wachsen der *Volumina* derselben mit abnehmendem Gasdrucke von Interesse.

Zur numerischen Berechnung der die kreisscheiben-

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 56. p. 327. 1895.



förmigen Platten umgebenden Dunkelraumvolumina ist die Formel

$$R = d[A + B(a_1 + a_3) + C(a_1^2 + a_1 a_3 + a_3^2)]$$

am bequemsten, in der  $a_1$  und  $a_3$  die in Millimeter umgerechneten Einstellungsdifferenzen in Bezug auf die erste und dritte Schicht bedeuten und

$$d = \frac{1}{2}(a_3 - a_1), \quad A = 2\pi\left(r^2 - \frac{\rho^2}{2}\right), \quad B = \frac{\pi^2}{2}r, \quad C = \frac{\pi}{3}$$

ist; ( $r$  Plattenhalbmesser,  $\rho$  halbe Dicke des den Plattenstiel umhüllenden Glasrohres).

Das Volumen des Dunkelraumes ist in den folgenden Tabellen unter  $R$  in Kubikmillimetern angegeben. Das Produkt  $R.p$  ist in absolutem Maße, d. h. auf *Erg* umgerechnet, aufgeführt (die Drucke wurden durch Quecksilbersäulen von rund 20° C. Temperatur gemessen, sodaß 1 mm der  $p$ -Werte in den Tabellen einem Druck von 0,1 . 13,55 g/cm<sup>2</sup> oder 0,1 . 13,55 . 981 = 1329 Dyne/cm<sup>2</sup> entspricht; dies mit den Volumen  $R$  in Kubikcentimetern multipliziert gibt cm . cm g sec<sup>-2</sup> oder *Erg*).

Um das Spektrum der Gasfüllung fortwährend überwachen zu können, wurde ein Querschnittsbild der an der Elektrode sich ausbildenden Lichtfigur  $A$  (Fig. 2 von oben gesehen) mittels eines Fernrohrobjektives  $F$  und eines großen total-reflektierenden Prismas  $P$  auf den Spalt  $S$  eines Merz'schen Spektralapparates entworfen. Die den rechten Teil der Fig. 2 bildenden Bestandteile der Anordnung sind unter sich verbunden und können samt dem Spektralapparat in einer Schlittenführung, parallel mit sich selbst, durch eine Mikrometerschraube hin und her bewegt werden. Dadurch kann man das Spektrum der einzelnen Schichten gesondert betrachten. Besonders bei den *Elektrodenplatten* ist die Tiefe, aus der das Licht kommt, auch bei der inneren Schicht so groß, daß der Anteil, welchen die äußere umhüllende Schicht hinzufügt, gegen denjenigen der inneren vollkommen zurücktritt. Die Verschiedenheiten und die Änderungen, welche sich in den Spektren der beiden leuchtenden Kathodenschichten mit abnehmendem Gasdrucke einstellen und die gerade bei Wechselstrom überaus markant sind, verdienen eine besondere Aufmerksamkeit.

Eine Hauptstörung bei allen genaueren quantitativen Untersuchungen über Gasentladungen bilden die von der Pumpe herüberkommenden Quecksilberdämpfe. Um das Eindringen derselben nach Möglichkeit zu verhindern, war zwischen dem Beobachtungsraum und allen übrigen Teilen (Pumpe und Druckmeßapparat) ein U-Rohr eingeschaltet, in dem eine größere Anzahl von Blattgoldpfropfen zwischen lockeren Glaswollstopfen übereinander geschichtet waren. Dieses Mittel hatte einen guten Erfolg, solange die Goldfüllung frisch war.

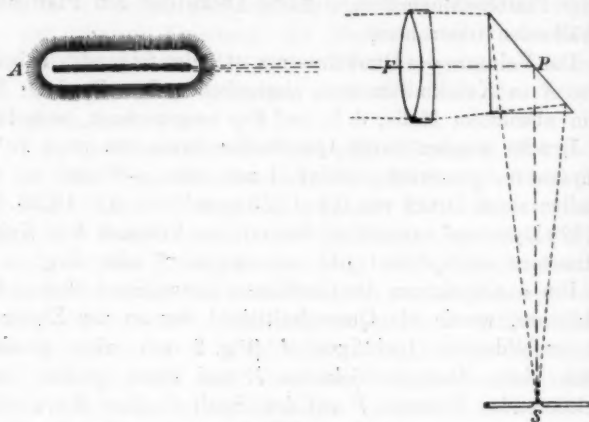


Fig. 2.

Nicht minder sorgsam musste jede Spur von Wasserdampf fern gehalten werden. Das übliche Trockenmittel, Phosphor-pentoxyd, ist nur dann zu verwenden, wenn es absolut rein ist, was bei den käuflichen Proben durchaus nicht der Fall ist. Wir haben uns verschiedentlich das  $P_2O_5$  durch Verbrennen reinsten, elektrisch gewonnenen Phosphors im trockenen Luftstrome selbst hergestellt, das Präparat dann aber im getrockneten Sauerstoffstrome über glühendem Platinschwamme nach dem Vorgange der Herren Shenstone und Beck<sup>1)</sup> noch einmal sublimiert und unmittelbar darauf in die Trocken-gefäße gebracht. Aber auch dann ist dieses Trockenmittel nach längerem Gebrauche verdorben, was sich durch einen

1) W. A. Shenstone u. C. R. Beck, Chem. Soc. 63. p. 475. 1899.

stechenden Geruch beim Öffnen der Entladungsgefäße bemerklich macht. Nach sehr vielen Bemühungen, bei denen wir uns der gütigen Unterstützung verschiedener chemischer Kollegen zu erfreuen hatten, fanden wir reinste, konzentrierte Schwefelsäure, von der unmittelbar vor dem Gebrauche alle flüchtigen Bestandteile durch Erhitzen auf  $338^{\circ}$  abdestillirt waren, in verschiedenen Trockenflaschen vorgeschaltet, am wirksamsten und saubersten. Bei Sauerstoff und Stickstoff wurden die Gase erst *verflüssigt*; sodann ließ man sie langsam direkt in das Entladungsgefäß hineindampfen, wodurch selbst Spuren von Feuchtigkeit am sichersten zurückgehalten wurden, da der Dampfdruck des Eises bei diesen niedrigen Temperaturen verschwindend klein ist.

In den folgenden Tabellen haben die über den einzelnen Kolumnen stehenden Überschriften dieselbe Bedeutung wie in der früheren Arbeit; bemerkt sei nur noch, daß bei den hier mitgetheilten definitiven Messungsreihen sowohl auf die äußeren Begrenzungen der inneren, ersten Kathodenschicht wie auf die inneren Grenzen der äußeren, dritten Schicht auf beiden Seiten der Elektrode eingestellt wurde, und als Dicke  $d$  die Differenz der Dicken von dritter und erster Schicht aufgeführt ist, also in der That die Dicke des Raumes, der durch seine fast völlige Lichtlosigkeit das Interesse vornehmlich in Anspruch nimmt (gewöhnlich wird die Dicke des Dunkelraumes direkt von der Elektrodenoberfläche an gerechnet, was freilich immer dann erlaubt ist, wenn die Dicke der innersten Schicht verschwindend klein ist, was bei einigen Gasen innerhalb gewisser Drucke in der That der Fall ist).

Wir halten es für dringend notwendig, bei derartigen Messungen *alle* die Entladung bestimmenden Faktoren zu messen und mitzuteilen und nicht etwa nur die Stromstärkewerte ohne die Spannungen oder umgekehrt; wie viele der älteren und gelegentlich auch neueren Beobachtungen entziehen sich dadurch der Vergleichbarkeit, daß eine wesentliche Größe bei ihnen nicht mit bestimmt ist.

Zu unserer Orientierung haben wir eine viel größere Anzahl von Beobachtungsreihen angestellt, als im folgenden mitgeteilt sind; die Nummern derselben, sowie die in der ersten Kolumne stehenden Ziffern beziehen sich auf das Beobachtungsjournal.

## I. Sauerstoff.

Derselbe wurde in den meisten Fällen aus chlorsaurem Kalium ohne weiteren Zusatz bereitet, durch Kalilauge und Jodkaliumlösung gereinigt und sodann direkt verflüssigt, indem man das Gas in ein Kondensationsgefäß leitete, welches in eine mit flüssiger Luft angefüllte Dewarflasche tauchte. Durch die Verflüssigung erreichte man vor allem, daß man ein vollkommen trockenes Gas erhielt, da alle Feuchtigkeit in festem Zustande in der Flüssigkeit zurückgehalten wurde. Um das Entladungsgefäß mit Sauerstoff zu füllen, ließ man direkt den flüssigen Sauerstoff aus dem Kondensationsgefäß in das Entladungsgefäß, welches möglichst weit evakuiert war, hinein verdampfen. Sodann wurde noch zweimal sorgfältig gespült, indem dazwischen alle Teile wieder unter fortwährendem Stromdurchgange evakuiert wurden, und mit der vierten Füllung die Messung angestellt.

Bei Sauerstoff war früher eine eigentümliche Diskontinuität bei dem Drucke  $p = 0,70$  mm aufgetreten, derart, daß dort die Konstanten  $m$  und  $d_0$  der Formel (I) plötzlich ihre Werte wechselten. Dieser Druck ist der nämliche, bei dem Hr. C. Bohr eine Abweichung vom Boyle-Mariotteschen Gesetz für Sauerstoff gefunden zu haben glaubte. Daß die Diskontinuität in dem Verlaufe der  $p$ - $d$ -Kurven mit dem Entladungsvorgange selbst zusammenhängt und nicht in Abweichungen von den Gasgesetzen ihren Grund habe, wurde sofort erkannt, als die Entladungsbedingungen gewechselt wurden, wodurch sich die Knickstelle der sonst völlig geradlinigen Kurven, die man erhält, wenn man die  $\log p$  als Abszissen, die  $\log d$  als Ordinaten aufträgt, verschiebt. Auf einen Grund, der diese Diskontinuität bedingt, wurde oben p. 78 schon hingewiesen. Ein anderer liegt darin, daß bei einigen Gasen die Dicke  $d'$  der innersten, ersten Kathodenschicht plötzlich sehr schnell zu wachsen beginnt, wobei gleichzeitig die dritte Schicht um entsprechende Beträge hinausgeschoben wird. Zieht man also diese Dicke  $d'$  von den  $d$ -Werten nicht ab, so müssen diese von einem bestimmten Drucke an schneller wachsen, als dem eingangs erwähnten Gesetze  $d \cdot p^m = d_0$  entspricht. So wurde z. B. für die Plattenelektroden erhalten:

$p = 4,98$	4,22	3,55	2,99	2,75	2,32	1,94
$d' = 0,09$	0,08	0,08	0,09	0,10	0,14	0,14
$p = 1,63$	1,37	1,16	0,96	0,81	0,47	0,42
$d' = 0,20$	0,28	0,39	0,46	0,60	0,97	1,82

Bis zu Drucken von etwa 1,8 mm wächst  $d'$  nur sehr langsam, dann schneller und von  $p = 0,7$  an nimmt die innerste Schicht sehr rasch an Dicke zu. Vermeidet man die genannten Fehlerquellen, so behalten die beiden Konstanten  $m$  (die Steigung der Geraden bei der erwähnten graphischen Darstellung) und  $d_0$  (Höhe der geraden Linie, gemessen durch den Dickenwert beim Druck  $p = 1$ ) ihre Werte für das ganze Druckintervall bei.<sup>1)</sup> Zum Belege hierfür sei zunächst eine Beobachtungsreihe angeführt, die mit der oben p. 77 unter 4. erwähnten Aluminiumkugel als Elektrode angestellt wurde, vgl. Tab. 1.

Tabelle 1.

Sauerstoff, VI. Reihe. Kugel.

 $m = 0,835$ ,  $d_0 = 1,566$ .

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_1/d_2$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R \cdot p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
209	3,41		0,535		0,533	-0,272	+0,03	188	855	128	3,2	19	2,4	340	0,0154	5,2
210	2,89	1,18	0,646	1,21	0,461	-0,190	0,00	235	904	126	3,4	21	2,6	322	0,0167	5,4
211	2,42	1,19	0,754	1,17	0,384	-0,123	0,00	285	915	128	3,2	21	2,4	355	0,0157	5,6
212	2,06	1,17	0,846	1,12	0,314	-0,073	0,00	326	879	129	3,4	22	2,7	362	0,0170	6,2
213	1,70	1,21	0,983	1,16	0,230	-0,007	0,00	386	867	130	3,3	21	2,5	375	0,0153	5,7
214	1,44	1,18	1,15	1,17	0,158	0,061	0,00	464	889	130	3,3	21	2,5	398	0,0153	6,1
215	1,20	1,20	1,33	1,16	0,079	0,124	0,00	560	893	130	3,4	23	2,7	432	0,0170	7,3
216	1,00	1,20	1,566	1,17	0,000	0,195	0,00	682	902	130	3,3	21	2,4	463	0,0152	7,0
217	0,83	1,20	1,78	1,14	-0,081	0,250	+0,04	808	892	130	3,4	22	2,7	516	0,0169	8,7
218	0,70	1,19	2,12	1,19	-0,155	0,326	-0,02	1019	948	130	3,2	21	2,4	557	0,0150	8,4
219	0,57	1,23	2,67	1,26	-0,244	0,427	-0,17	1411	1072	130	3,1	20	2,2	603	0,0137	8,3
220	0,47	1,21	3,18	1,17	-0,328	0,495	-0,18	1860	1162	130	3,2	21	2,4	678	0,0154	10,4

1) Unterdessen ist ja auch die von Hrn. Bohr vermutete Abweichung im Verhalten des Sauerstoffs durch die Arbeiten von Thiessen und Lord Rayleigh auf anderweitige Ursachen zurückgeführt worden.

Die Werte  $\delta$ , welche die Abweichungen der beobachteten Werte von einer mit den Werten von  $m$  und  $d_0$ , die über der Tabelle stehen, gezeichneten Geraden in Millimeter angeben, liegen durchaus innerhalb der bei der Dickenmessung unvermeidlichen Beobachtungsfehler (vgl. darüber die frühere Arbeit p. 208).

Überblickt man die  $d$ -Werte (vgl. auch die graphische Darstellung der Logarithmenwerte in Fig. 3), so könnte man freilich den Eindruck gewinnen, daß nach Passieren des

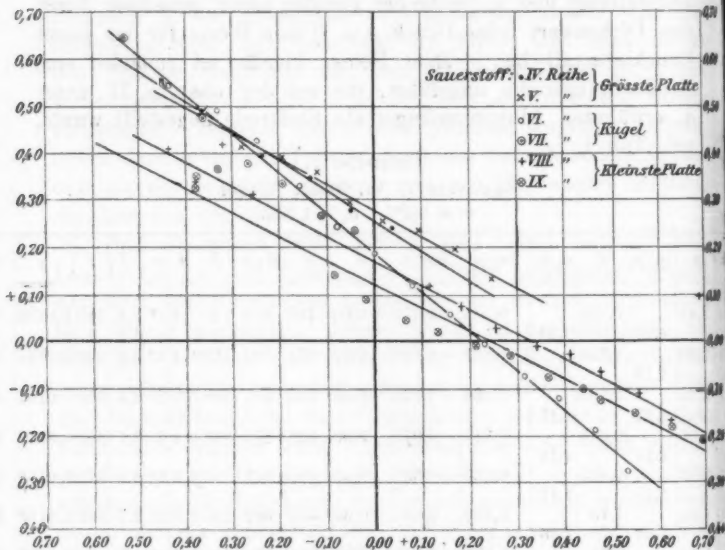


Fig. 3.

Druckes  $p = 0,70$  (d. i. der Stelle  $-0,155$  in Fig. 3) eine Abweichung in dem Sinne einsetze, dass die Dunkelräume schneller als vorher wachsen. Denn während sich die  $d$ -Werte dem Gesetze bisher ganz streng angeschlossen hatten, ( $\delta = \pm 0,00$ ) erscheinen mit  $p=0,70$  die über der Ausgleichsgeraden liegenden Punkte ( $\delta$  negativ). Indessen liegen diese Abweichungen innerhalb der Fehlergrenzen der Messungen.

Nach Abschluß dieser Beobachtungsreihe wurde 13 Stunden später noch einmal ausgepumpt und bei  $p = 0,37$  ein Wert

für  $d$  gefunden ( $= 3,51$ ), der sich mit seinem  $\delta = + 0,06$  seinem  $R = 2182$  und  $R.p = 1074$  sehr gut den übrigen Werten der Reihe anschließt; der betreffende Punkt liegt genau auf der Geraden, die im Diagramm durch die bei höheren Drucken gewonnenen Punkte bestimmt ist. Die folgende, mit derselben Elektrode gewonnene Reihe zeigt gerade an den in Betracht kommenden Stellen etwa ebenso grosse Abweichungen im entgegengesetzten Sinne, sodaß eine vollkommene Gerade als diejenige Linie resultiert, der sich alle Beobachtungen am besten anschliessen.

Tabelle 2.

Sauerstoff, VII. Reihe. Kugel.

 $m = 0,835$ ,  $d_0 = 1,566$ .

r.	p	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
22	1,08		1,49		0,033	0,175	-0,03	638	916	126	3,3	19	2,3	472	0,0136	6,4
		1,19		1,15												
23	0,91		1,72		-0,041	0,235	-0,03	785	949	124	3,3	20	2,3	501	0,0136	6,8
		1,18		1,09												
24	0,77		1,88		-0,113	0,274	+0,06	895	916	124	3,3	20	2,3	539	0,0136	7,3
		1,20		1,16												
25	0,64		2,185		-0,194	0,339	+0,08	1124	956	127	3,3	20	2,3	577	0,0138	8,0
		1,18		1,09												
26	0,54		2,39		-0,268	0,378	+0,22	1260	904	127	3,3	21	2,4	636	0,0139	8,8
		1,23		1,25												
27	0,44		3,00		-0,356	0,477	+0,09	1737	1016	127	3,3	20	2,4	679	0,0141	9,6
		1,22		1,18												
28	0,36		3,54		-0,444	0,549	+0,11	2237	1070	128	3,3	20	2,4	743	0,0141	10,5
		1,24		1,24												
29	0,29		4,38		-0,528	0,641	-0,09	3121	1203	127	3,2	18	2,1	844	0,0129	10,9

Beim Evakuieren wurde darauf Bedacht genommen, daß die Druckwerte der zweiten Beobachtungsreihe (VII) zwischen die der ersten Reihe (VI) fielen; dementsprechend liegen auch die  $d$ -Werte, und beide Reihen liefern Messungswerte, die sich so eng dem Gesetze anschließen, daß sie durch dieselben Werte der Konstanten  $m$  und  $d_0$  dargestellt und im Diagramm daher beide Reihen durch eine Gerade repräsentiert werden. Die Gasbereitung und Einführung war dabei beide Male die eingangs erwähnte.

Die Dunkelraumdicken wachsen langsamer als die Drucke abnehmen, daher ist  $m$  kleiner als 1.



Der nahen Übereinstimmung der  $d$ -Werte entsprechend fallen auch die Werte für das Dunkelraumvolumen  $R$  für dieselben Drucke nahezu zusammen; nur bei den tieferen Drucken (etwa von 0,74 an) machen sich die kleinen noch innerhalb der Fehlergrenzen liegenden Abweichungen in den  $d$ -Werten verstärkt geltend.

Die Größen  $R \cdot p$  halten sich bis zu Drucken von etwa 0,6 bei der ersten Reihe, bis 0,5 bei der zweiten sehr nahe in derselben Höhe, dann treten plötzlich etwas größere Werte ein. Zu beachten ist aber, daß bei einer Abnahme des Druckes von 3,41 bis auf 0,29, also um das 12fache, die Größe  $R \cdot p$  sich nur von 855 auf 1203, also nur im Verhältnisse von 2:3 steigert. Das Dunkelraumvolumen wächst also nicht umgekehrt proportional mit dem Drucke, sondern etwas schneller; doch ist die Abweichung von einem dem Boyle-Mariotteschen Gesetze entsprechenden Verlaufe der  $R$ - und  $p$ -Werte für höhere Drucke so gering, daß es den Anschein gewinnt, als sei der *Dunkelraum immer nahezu von derselben Gasmenge erfüllt* (bei derselben Stromstärke  $i$ , die, wie man aus den Tabellen sieht, innerhalb der Messungsreihen nur wenig variierte). Der letzte Wert (229) wurde am anderen Tage erhalten; wie man sieht, schließt er sich der Reihe vorzüglich an, was die Dicke des Dunkelraumes betrifft; das Dunkelraumvolumen erscheint indessen hier auffallend groß; vielleicht ist daran die etwas zu klein einregulierte Stromstärke  $i$  Schuld.

Geht man von einer kugelförmigen Kathode zu einer plattenförmigen über, so erhält man durchweg ein langsames Ansteigen der Dickenwerte mit abnehmendem Drucke, die entsprechenden  $m$  fallen kleiner aus. In dem Diagramm Fig. 3, in welches für vier mit Plattenelektroden angestellte Messungsreihen die entsprechenden Geraden eingetragen sind, schneiden diese daher die steilere für die Kugel gefundene.

Die beiden untersten Geraden entsprechen Messungsreihen (VIII. und IX. Reihe, Tab. 3 und 4), die mit Platte 3, der kleinsten der verwendeten Platten, aber verschieden behandelten (vor allem verschieden gut getrockneten) Sauerstofffüllungen erhalten wurden.<sup>1)</sup> Man sieht wie kleine Verunreinigungen

1) Die horizontalen Striche in den Tabellen bedeuten, daß die Messungsreihen an den betreffenden Stellen abgebrochen, mit derselben

Nr.	
273	4,
274	4,
275	3,
276	2,
277	2
278	2
279	1
280	1
281	
286	
287	
288	
289	



zwar die Kurvenneigungen (die Werte für  $m$ ) nahezu unverändert gelassen haben, aber auf die absolute Höhe der  $d$ -Werte für dieselben Drucke von merklichem Einflusse sind.

Die Platte 3 hatte, wie p. 77 erwähnt wurde, dieselbe Oberfläche wie die Kugel; man sieht aber aus dem Diagramm, daß dieselbe Dicke des Dunkelraumes für beide Elektrodenformen nur für einen Druck von ungefähr 1,38 mm resultiert; bei höheren Drucken hat die Platte, bei tieferen die Kugel den größeren Dunkelraum.

Tabelle 3.

Sauerstoff, VIII. Reihe. Kleinste Platte.

$$m = 0,524, \quad d_0 = 1,49.$$

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
273	4,975		0,62		0,697	-0,208	+0,03	242	1601	129	3,1	20	2,5	397	0,0141	5,6
		1,18		1,10												
274	4,23		0,68		0,626	-0,168	+0,02	267	1503	129	3,1	20	2,5	398	0,0141	5,5
		1,18		1,15												
275	3,60		0,78		0,556	-0,111	-0,02	310	1485	128	3,1	20	2,5	390	0,0139	5,4
		1,21		1,09												
276	2,98		0,85		0,474	-0,071	-0,01	346	1373	128	3,1	20	2,5	386	0,0141	5,4
		1,16		1,09												
277	2,58		0,93		0,412	-0,034	-0,02	386	1324	127	3,1	20	2,4	390	0,0140	5,5
		1,20		1,06												
278	2,155		0,99		0,333	-0,007	0,00	414	1187	127	3,1	20	2,4	397	0,0143	5,7
		1,19		1,09												
279	1,81		1,08		0,258	0,083	+0,01	457	1099	129	3,3	19	2,5	401	0,0141	5,6
		1,19		1,10												
280	1,52		1,19		0,182	0,076	0,00	517	1045	128	3,2	19	2,5	420	0,0139	5,8
		1,18		1,09												
281	1,29		1,30		0,111	0,114	-0,01	582	997	128	3,2	19	2,4	436	0,0141	6,1
286	0,56		2,06		-0,252	0,314	-0,05	1309	975	129	3,2	20	2,4	636	0,0139	8,8
		1,17		1,26												
287	0,48		2,59		-0,319	0,413	-0,41	1787	1140	129	3,3	20	2,4	707	0,0136	9,6
		1,18		0,83												
288	0,423		2,16		-0,374	0,335	+0,18	1824	1025	130	3,2	20	2,4	783	0,0135	10,6
		1,14		1,17												
289	0,37		2,53		-0,432	0,403	-0,02	2477	1218	130	3,2	20	2,4	883	0,0134	11,8

Gasfüllung aber später, gewöhnlich am anderen Tage wieder aufgenommen und weitergeführt wurden. Man ersieht aus den kleinen nicht über die Fehlergrenzen hinaus gehenden Werten von  $\delta$ , wie nahe sich diese Fortsetzungen den ursprünglichen Werten anschließen, wie gut sich also die Gasfüllungen erhalten hatten.

Tabelle 4.

Sauerstoff, IX. Reihe. Kleinste Platte.

$$m = 0,512, \quad d_0 = 1,33.$$

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R \cdot p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$I$
290	4,98		0,62		0,697	-0,208	-0,03	243	1608	124	3,2	19	2,4	393	0,0131	3,1
		1,18		1,08												
291	4,224		0,67		0,626	-0,174	-0,03	264	1484	127	3,2	20	2,4	382	0,0135	3,2
		1,19		1,05												
292	3,55		0,70		0,550	-0,155	-0,01	277	1309	127	3,2	20	2,4	374	0,0138	3,3
		1,19		1,07												
293	2,99		0,75		0,476	-0,123	+0,01	303	1204	127	3,2	20	2,4	374	0,0137	3,1
		1,09		1,05												
294	2,75		0,79		0,439	-0,101	0,00	322	1178	126	3,3	20	2,4	374	0,0135	3,2
		1,19		1,08												
295	2,32		0,85		0,365	-0,073	+0,02	353	1086	126	3,3	20	2,4	374	0,0138	3,3
		1,19		1,11												
296	1,94		0,94		0,288	-0,027	0,00	399	1029	126	3,3	20	2,4	382	0,0134	3,2
		1,19		1,05												
297	1,63		0,99		0,212	-0,004	+0,04	434	940	126	3,3	20	2,4	390	0,0138	3,3
		1,19		1,06												
298	1,37		1,05		0,137	0,021	+0,09	479	872	125	3,2	20	2,3	408	0,0130	3,3
		1,18		1,07												
299	1,16		1,12		0,064	0,049	+0,12	537	826	125	3,2	20	2,3	430	0,0130	3,3
		1,21		1,12												
300	0,96		1,25		-0,018	0,097	+0,11	630	804	126	3,2	19	2,3	457	0,0131	3,0
		1,18		1,12												
301	0,813		1,40		-0,090	0,146	+0,08	756	817	126	3,2	20	2,3	494	0,0130	3,4
304	0,47		2,3		-0,328	0,362	-0,34	1612	1007	126	3,2	20	2,3	670	0,0128	3,5
		1,12		—												
305	0,42		2,11		-0,377	0,324	-0,03	1801	1005	124	3,2	20	2,2	745	0,0125	3,3
		—		—												
305'	0,42		2,25		-0,377	0,352	-0,17	1935	1080	124	3,2	20	2,2	745	0,0125	3,3

Auf die Werte von  $R$  hat dies nur einen geringen Einfluß, um Kugeln und Platten herum sammelt sich bei demselben Drucke etwa dieselbe Menge nichtleuchtender Materie, indessen zeigt sich bei den Werten des Produktes  $R \cdot p$  eine eigentümliche Erscheinung; dieselben sind bei weitem nicht so konstant wie bei der Kugel, sondern nehmen erst ab, erreichen ein Minimum und nehmen dann bei tiefen Drucken wieder langsam zu; bei der kleinen Platte 3 liegt das Minimum bei  $p = 0,91$  mm. Man erkennt dies am besten bei einer graphischen Aufzeichnung der betreffenden Werte, vgl. später Fig. 7 p. 103.

Die Platte 2 hatte nach p. 77 eine viermal so große Fläche, wie die kleinste Platte 3; wir teilen zum Vergleiche noch zwei mit dieser größten Platte angestellte Messungsreihen mit (IV. und V. Reihe, Tab. 5 und 6). Man sieht sofort, daß die denselben Drucken entsprechenden Dicken größer

Tabelle 5.

Sauerstoff, IV. Reihe. Grösste Platte.

$$m = 0,643, \quad d_0 = 1,80.$$

$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_1/d_2$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
1,10		1,74		0,041	0,240	-0,04	2665	3893	123	3,9	12	2,2	364	0,0171	6,2
	1,22		1,10												
0,90		1,92		-0,046	0,284	+0,01	2978	3561	123	3,8	12	2,2	371	0,0171	6,4
	1,22		1,16												
0,74		2,23		-0,131	0,349	-0,04	3586	3526	123	3,7	12	2,2	390	0,0170	6,6
	1,28		1,12												
0,58		2,50		-0,237	0,397	+0,07	4130	3181	123	3,7	13	2,2	427	0,0170	7,2
	1,32		1,23												
0,44		3,07		-0,356	0,488	-0,01	5360	3139	123	3,6	13	2,2	491	0,0168	8,2
	1,22		1,17												
0,36		3,59		-0,444	0,556	-0,11	6580	3147	123	3,6	14	2,1	561	0,0168	9,4

Tabelle 6.

Sauerstoff, V. Reihe. Grösste Platte.

$$m = 0,549, \quad d_0 = 1,90.$$

$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
1,77		1,37		0,248	0,137	+0,02	2020	4753	123	3,6	14	2,2	358	0,0165	5,9
	1,19		1,15												
1,49		1,58		0,173	0,198	-0,05	2380	4712	124	3,5	13	2,0	368	0,0152	5,6
	1,19		1,09												
1,25		1,73		0,097	0,233	-0,05	2640	4387	125	3,5	13	2,0	371	0,0153	5,7
	1,19		1,05												
1,05		1,81		0,021	0,259	+0,04	2790	3892	125	3,6	13	2,2	390	0,0164	6,4
	1,18		1,09												
0,89		1,98		-0,051	0,296	+0,03	3110	3676	121	3,6	13	2,1	403	0,0158	6,4
	1,17		1,16												
0,76		2,29		-0,119	0,360	-0,08	3700	3740	120	3,6	13	2,1	432	0,0160	6,9
	1,19		1,08												
0,64		2,48		-0,194	0,394	-0,04	4090	3477	123	3,5	13	2,2	454	0,0161	7,3
	1,21		1,05												
0,53		2,61		-0,276	0,416	+0,09	4360	3070	125	3,6	13	2,2	476	0,0165	7,8
	1,21		1,18												
0,44		3,07		-0,356	0,487	-0,08	5360	3139	125	3,6	14	2,2	525	0,0164	8,6

sind, als bei der kleineren Platte, das ganze Kathodengebilde ist lockerer bei der großen Platte. Die letztere hat bei  $p = 0,49$  mm dieselbe Dunkelraumdicke wie die an Oberfläche viermal kleinere Kugel. Die Messungen sind hier schwieriger als bei der kleinen Platte, kleine Abweichungen in der Gasbeschaffenheit alterieren die Kurvenneigung (die Konstante  $m$ ). Um daher die verschiedenen Gase in ihrem Verhalten miteinander zu vergleichen, hält man sich besser an die mit den kleinen Platten und großen Stromdichten erhaltenen Messungsreihen; im Folgenden sind daher hauptsächlich die mit Platte 8 ausgeführten Messungen mitgeteilt.

Zieht man die elektrischen Daten zum Vergleich der auf die großen und kleinen Platten bezüglichen Reihen heran, so sieht man, daß hohen Werten von  $d_0$  ein großer Wattverbrauch  $E$  parallel geht, was sich auch bei anderen Gasen und beim Vergleiche verschiedener Gase untereinander bestätigt.

Die dunklen Gasvolumina, welche die viermal so große Platte umgeben, sind für dieselben Drucke, der kleinen Verschiedenheiten in den  $d$ -Werten ungeachtet, sehr nahe viermal so groß wie diejenigen an der kleinen Platte, sodaß die Menge Partikelchen, welche an der Kathode nichtleuchtend beim Stromdurchgange durch den Entladungsraum werden, wie die Kathodenoberfläche wächst (bei vollkommen bedeckter Kathode und innerhalb der hier innegehaltenen Grenzen der Stromdichte).

Die  $R.p$ -Werte zeigen ein ähnliches Verhalten wie bei der kleinen Platte; nur ist das Minimum hier viel weiter zu den niederen Drucken hin verschoben (etwa bei 0,42 gelegen).

## 2. Stickstoff.

Derselbe wurde aus Salmiak und Natriumnitrit mit einem Zusatz von Kaliumdichromat dargestellt, zunächst durch Eisenvitriol gereinigt und in einem Gasometer aufgefangen. Um ihn vollkommen zu reinigen und sodann zu verflüssigen, wurde er über Ätzkali, durch Schwefelsäure und über Phosphorpentoxyd zum Trocknen, sodann in zwei Verbrennungsöfen über glühendes Kupfer und Eisen geleitet und nochmals über Phosphorpentoxyd getrocknet, um sodann verflüssigt zu werden. Da der Kondensationspunkt des Stickstoffs unter dem Siede-

punkt der flüssigen Luft liegt, wurde die Luft, in der das Kondensationsgefäß sich befand, durch Absaugen mittels zweier Wasserstrahlpumpen unter die Kondensationstemperatur des Stickstoffs unterkühlt. Man erhielt wieder vollkommen trockenen Stickstoff, der in derselben Weise, wie oben beim Sauerstoff beschrieben, in das Entladungsgefäß eingefüllt wurde.

Von den verschiedenen mit diesem Gase angestellten Versuchsreihen möge nur eine, mit der kleinsten Platte 3 angestellte (V. Reihe, Tab. 7) hier Platz finden. Man sieht, daß der

Tabelle 7.

Stickstoff, V. Reihe. Kleinste Platte.

$$m = 0,796, \quad d_0 = 2,11.$$

<i>p</i>	$p_1/p_2$	<i>d</i>	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	<i>R</i>	<i>R. p</i>	<i>S</i>	<i>A</i>	<i>v</i>	<i>J</i>	<i>V</i>	<i>i</i>	<i>E</i>
3,68		0,73		0,556	-0,137	+0,01	283	1332	128	3,2	19	2,4	386	0,0133	5,1
3,12	1,18	0,83	1,14	0,494	-0,081	+0,03	332	1377	128	3,2	19	2,4	386	0,0133	5,1
2,64	1,18	0,96	1,16	0,422	-0,018	+0,02	394	1383	128	3,3	19	2,4	390	0,0134	5,2
2,23	1,18	1,14	1,19	0,348	0,057	-0,02	488	1446	128	3,2	19	2,4	405	0,0133	5,4
1,89	1,18	1,26	1,10	0,277	0,100	0,00	550	1381	128	3,3	19	2,4	426	0,0136	5,8
1,61	1,17	1,45	1,15	0,207	0,161	0,00	663	1415	128	3,2	20	2,4	450	0,0136	6,1
1,34	1,20	1,68	1,16	0,127	0,225	0,00	809	1440	128	3,2	19	2,4	488	0,0136	6,6
1,17	1,15	1,95	1,16	0,068	0,290	-0,09	996	1549	128	3,2	19	2,3	532	0,0130	6,9
1,01	1,16	2,26	1,16	0,004	0,354	-0,16	1260	1692	128	3,1	20	2,3	585	0,0131	7,7
0,87	1,16	2,44	1,08	-0,061	0,387	-0,07	1470	1700	128	3,1	20	2,3	638	0,0133	8,5
0,75	1,16	2,74	1,12	-0,125	0,438	-0,08	1838	1832	130	3,1	20	2,4	709	0,0132	9,4
0,77		2,70		-0,114	0,431	0,00	1822	1864	130	3,2	19	2,3	709	0,0142	10,1
0,65	1,18	3,10	1,15	-0,187	0,491	-0,12	2324	2007	130	3,2	20	2,3	778	0,0141	11,0
0,49	1,33	3,65	1,18	-0,310	0,562	+0,07	3448	2246	129	3,1	20	2,3	906	0,0129	11,7
0,435	1,13	4,02	1,10	-0,362	0,604	+0,08	4138	2393	128	3,1	20	2,3	977	0,0129	12,6
0,38	1,15	4,51	1,12	-0,420	0,654	+0,06	5309	2681	129	3,1	20	2,2	1059	0,0130	13,8
0,32	1,19	5,25	1,16	-0,495	0,720	0,00	7076	3009	128	3,1	21	2,2	1150	0,0130	14,9

Zusammenhang zwischen  $\log p$  und  $\log d$  wieder ein vollkommen linearer ist, ohne jede Diskontinuität zwischen Drucken von 3,68 bis 0,32 mm; die Dicken der Dunkelräume wachsen hier aber wesentlich schneller als beim Sauerstoff (vgl. Tab. 3 und 4);  $m$  hat einen größeren Wert als dort. Die Dicke  $d'$  der innersten Schicht wächst anfangs sehr langsam, von  $p = 0,70$  etwa an dagegen wesentlich schneller, wie die folgenden Zahlen zeigen:

$$p = 3,68 \quad 3,12 \quad 2,64 \quad 2,23 \quad 1,89 \quad 1,61 \quad 1,34 \quad 1,17 \quad 1,01$$

$$d' = 0,00 \quad 0,04 \quad 0,04 \quad 0,06 \quad 0,05 \quad 0,08 \quad 0,11 \quad 0,14 \quad 0,25$$

$$p = 0,87 \quad 0,75 \quad 0,77 \quad 0,65 \quad 0,49 \quad 0,44 \quad 0,38 \quad 0,32$$

$$d' = 0,40 \quad 0,61 \quad 0,64 \quad 0,81 \quad 1,48 \quad 1,61 \quad 1,96 \quad 2,22$$

Die Dunkelraumvolumina  $R$  sind hier bei demselben Drucke grösser als beim Sauerstoff bei Anwendung derselben Elektrodenplatte und zwar bei den tieferen Drucken mehr als doppelt so groß.

Das Produkt von Druck  $p$  mal Volumen  $R$  bleibt nur bei den höheren Drucken angenähert konstant und nimmt mit fortschreitender Evakuierung stetig zu, doch hat es seinen Wert nur etwa verdoppelt, wenn der Druck bereits auf  $\frac{1}{10}$  des Anfangswertes gesunken ist.

### 3. Wasserstoff.

In einem Kippschen Apparate wurde möglichst reines Aluminium mit Kalilauge zusammengebracht. Der so entwickelte Wasserstoff wurde durch übermangansaures Kalium in saurer Lösung und ammoniakalischer Silbernitratlösung gereinigt und durch reinste Schwefelsäure, aus der durch Abdestillation alle Feuchtigkeit entfernt war und die einen Siedepunkt von  $338^\circ$  hatte, getrocknet. Sodann wurde derselbe direkt in das evakuierte Entladungsgefäß geleitet. Es wurde auch hier dreimal gespült, bevor mit den Messungen begonnen wurde. Jede einzelne Füllung dauerte etwa 6 Stunden.

Bei diesem Gase ist die Dicke des Dunkelraumes bei denselben Drucken größer als bei allen anderen Gasen. Auch ist das Anwachsen der  $d$ -,  $R$ - und  $R \cdot p$ -Werte mit dem Drucke viel stärker als sonst; die Konstante  $m$  erreicht hier beinahe den Wert 1, sodaß für Wasserstoff die Dicke des Dunkelraumes nahezu umgekehrt proportional mit dem Drucke wächst.

Tab. 8 und 9 geben zunächst zwei längere Messungsreihen (V. und VI. Reihe) wieder, die mit der Kugelelektrode er-

halten wurden. Bei Wasserstoff tritt die p. 75 erwähnte Erscheinung einer Art Selbstevakuation oft sehr deutlich hervor, wie z. B. ein Vergleich der Beobachtungen 240 und 241, zwischen denen nicht ausgepumpt, sondern nur eine längere Zeit gewartet worden war, oder die Messungen 260 und 260' zeigen. Man sieht, daß dabei, selbst wenn das Manometer wie im letzteren Falle keine merkliche Änderung anzeigt, die Dunkelräume wachsen, die Spannungen sich erhöhen, und der Wattconsum trotz verminderter Stromstärke zunimmt. Dabei wurde immer so lange zwischen jeder einzelnen Messung gewartet, daß sich die Elektroden wie das Gas wieder abgekühlt haben mußten.

Tabelle 8.

Wasserstoff, V. Reihe. Kugel.

$$m = 0,941, \quad d_0 = 6,87.$$

Nr.	p	$p_1/p_2$	d	$d_2/d_1$	log p	log d	$\delta$	R	R.p	S	A	v	J	V	i	E
230	6,155	1,19	1,11	1,27	0,798	0,045	+0,13	436	3571	128	3,5	20	2,7	267	0,0162	4,3
231	5,175	1,18	1,41	1,07	0,714	0,149	+0,05	586	4031	127	3,3	19	2,4	262	0,0144	3,8
232	4,37	1,19	1,51	1,28	0,641	0,179	+0,21	645	3747	127	3,3	19	2,4	273	0,0145	4,0
233	3,68	1,18	1,94	1,16	0,566	0,288	+0,08	889	4348	126	3,1	19	2,2	289	0,0131	3,8
234	3,12	1,18	2,25	1,28	0,494	0,352	+0,11	1088	4513	128	3,2	20	2,4	336	0,0138	4,6
235	2,65	1,19	2,87	1,30	0,423	0,458	-0,12	1549	5455	130	3,3	20	2,5	408	0,0149	6,1
236	2,23	1,19	3,73	1,15	0,348	0,572	-0,49	2307	6837	131	3,4	20	2,5	463	0,0149	6,9
237	1,88	1,20	4,30	1,09	0,274	0,634	-0,50	2897	7241	131	3,2	19	2,2	572	0,0135	7,7
238	1,57	1,19	4,68	1,21	0,196	0,670	-0,18	3559	7427	131	3,2	20	2,2	639	0,0137	8,8
239	1,32	1,20	5,67	1,13	0,121	0,754	-0,39	4574	8026	132	3,2	20	2,2	764	0,0133	10,2
240	1,10		6,41		0,041	0,807	-0,10	6784	9919	132	3,2	20	2,2	905	0,0131	11,9
241	1,01	1,22	6,77	1,14	0,004	0,831	+0,07	8520	11440	129	3,3	20	2,3	1006	0,0136	13,7
242	0,83	1,22	7,68	1,26	-0,081	0,885	+0,54	11113	12260	128	3,2	20	2,1	1110	0,0123	13,6
243	0,68	1,21	9,69	1,24	-0,168	0,986	+0,22	18626	16840	128	3,1	20	2,1	1315	0,0123	16,2
244	0,56	1,25	11,97	1,27	-0,252	1,078	-0,06	30692	22840	128	3,1	21	2,0	1486	0,0122	18,1
245	0,45		15,17		-0,347	1,181	-0,55	51133	30590	128	3,0	22	2,0	1672	0,0124	20,8



Tabelle 9.

Wasserstoff, VI. Reihe. Kugel.

 $m = 0,868$ ,  $d_0 = 7,82$ .

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R \cdot p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$
249	3,40		2,57		0,532	0,410	+0,04	1339	6052	128	3,3	19	2,4	327	0,0139
		1,18		1,29											
250	2,89		3,32		0,461	0,521	-0,29	1951	7494	128	3,3	19	2,4	374	0,0135
		1,18		1,12											
251	2,46		3,72		0,391	0,571	-0,20	2324	7598	126	3,3	19	2,3	485	0,0135
		1,18		1,10											
252	2,08		4,11		0,318	0,614	-0,04	2735	7563	125	3,3	19	2,3	556	0,0133
		1,18		1,36											
253	1,77		5,58		0,248	0,747	-0,84	4535	10670	124	3,2	19	2,3	643	0,0132
		1,19		0,97											
254	1,49		5,41		0,173	0,733	+0,09	4865	9634	126	3,3	19	2,3	744	0,0136
		1,18		1,26											
255	1,26		6,82		0,100	0,834	-0,45	7720	12930	128	3,2	20	2,3	857	0,0137
		1,20		1,09											
256	1,05		7,42		0,021	0,870	+0,04	9514	13280	130	3,3	21	2,3	979	0,0141
		1,19		1,13											
257	0,88		8,39		-0,056	0,924	+0,34	12525	14620	130	3,4	21	2,3	1118	0,0141
		1,19		1,22											
258	0,74		10,23		-0,131	1,010	$\pm 0,00$	19245	18920	130	3,3	22	2,3	1309	0,0139
		1,19		1,17											
259	0,62		11,99		-0,208	1,079	$\pm 0,00$	27626	22770	130	3,3	22	2,3	1459	0,0136
		1,19		1,17											
260	0,52		14,01		-0,284	1,146	$\pm 0,00$	39079	27020	130	3,2	23	2,2	1655	0,0135
		—		—											
260'	0,52		14,20		-0,284	1,152	-0,20	38194	26390	128	3,2	23	2,1	1834	0,0127

Die beiden mit derselben Elektrode aber verschiedenen Gasfüllungen ausgeführten Messungsreihen zeigen zwar nahezu dieselben Wachstumsgeschwindigkeiten der Dunkelräume mit fortschreitender Evakuuation aber etwas verschiedene absolute Größen ihrer Dicken, sodaß die beiden entsprechenden Geraden im Diagramm Fig. 4 zwar einander fast parallel ansteigen, aber etwas gegeneinander verschoben sind. Wiederum entsprechen wie beim Sauerstoff (p. 90) dem größeren  $d_0$  der VI. Reihe größere Werte der konsumierten Energie  $E$ .

Der Übergang zur Plattenelektrode 3 von gleicher Fläche (Tab. 10, VIII. Reihe) vermindert das steile Ansteigen nur wenig, liefert aber noch kleinere Dickenwerte für dieselben Drucke als beide Reihen für die Kugel (wieder parallel gehend mit geringerem Wattverbrauche).



Die Verhältnisse liegen hier, wie am besten ein Vergleich der Diagramme 4 und 3 zeigt, viel einfacher und klarer als beim Sauerstoff. Das Produkt  $R.p$  nimmt hier ebenfalls stetig zu und ist auf mehr als auf das Doppelte angewachsen, wenn der Druck auf  $\frac{1}{10}$  gesunken ist. Bei allen Messungen mit Wasserstoff erwies es sich als unumgänglich notwendig,

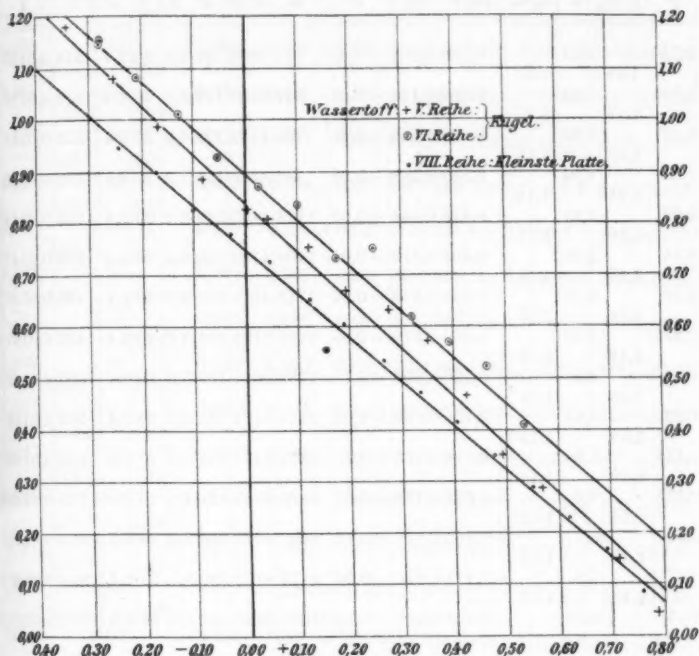


Fig. 4.

den Quecksilberdampf sorgfältigst von dem Entladungsraume fern zu halten, wollte man nicht Werte für die Dimensionen der Gebilde an der Kathode erhalten, die dem Wasserstoffe selbst überhaupt gar nicht zukommen. War nur eine Spur von Hg-Dampf in der großen Entladungsfiasche vorhanden, so wurde mit der oben p. 90 beschriebenen Anordnung festgestellt, daß in dem ausgedehnten blaßblauen Glimmlichte, welches dann auftritt, ausschließlich die Quecksilberlinien vor-

handen sind, welche bei tieferen Drucken einen außerordentlichen Glanz annehmen.

Tabelle 10.

Wasserstoff, VIII. Reihe. Kleinste Platte.

 $m = 0,854$ ,  $d_0 = 5,59$ .

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_1/d_2$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$
325	5,75		1,21		0,760	0,083	+0,05	514	3926	131	3,3	20	2,4	318	0,0135
		1,18		1,20											
326	4,89		1,45		0,689	0,161	-0,01	644	4188	132	3,3	20	2,4	318	0,0139
		1,18		1,17											
327	4,16		1,69		0,619	0,228	-0,03	785	4342	132	3,2	20	2,4	323	0,0141
		1,18		1,15											
328	3,54		1,94		0,549	0,288	-0,03	943	4438	131	3,3	20	2,4	332	0,0148
		1,18		1,14											
329	2,99		2,21		0,476	0,344	-0,01	1128	4485	131	3,3	20	2,4	353	0,0142
		1,18		1,17											
330	2,54		2,58		0,405	0,412	-0,04	1404	4739	130	3,3	20	2,4	382	0,0140
		1,18		1,14											
331	2,16		2,95		0,335	0,470	-0,04	1710	4911	130	3,3	20	2,4	420	0,0141
		1,18		1,15											
332	1,835		3,38		0,264	0,529	-0,04	2101	5125	131	3,2	20	2,4	460	0,0141
		1,18		1,18											
333	1,55		4,0		0,190	0,602	-0,13	2738	5641	131	3,2	20	2,4	509	0,0142
		1,18		1,12											
334	1,32		4,47		0,121	0,650	-0,05	3283	5761	131	3,2	20	2,4	567	0,0142
		1,19		1,19											
335	1,118		5,30		0,046	0,724	-0,18	4377	6474	131	3,3	20	2,4	663	0,0146
		1,19		1,13											
336	0,935		6,0		-0,029	0,778	-0,08	5429	6747	131	3,2	20	2,4	735	0,0142
		1,18		1,12											
337	0,79		6,7		-0,102	0,826	+0,12	6697	7033	130	3,2	20	2,3	825	0,0142
		1,18		1,18											
338	0,67		7,9		-0,174	0,898	0,00	9179	8175	130	3,1	21	2,3	914	0,0138
		1,18		1,12											
339	0,57		8,83		-0,244	0,946	+0,19	11390	8626	131	3,1	21	2,3	1027	0,0137

## 4. Kohlenoxyd.

Dasselbe wurde durch Erhitzen von Oxalsäure und Schwefelsäure dargestellt. Die gebildete Kohlensäure wurde durch Natronkalk und Kalilauge fortgenommen, das Kohlenoxyd durch die vorher stark erhitzte Schwefelsäure (vgl. p. 81) getrocknet und dann sofort in das Entladungsgefäß geleitet. Nach dreimaligem Spülen wurde mit der vierten Füllung die folgende Messungsreihe angestellt.

Bei diesem Gase (vgl. Tab. 11, IV. Reihe) ist die verhältnismäßig große Konstanz der  $R.p$ -Werte beachtenswert.

Tabelle 11.

Kohlenoxyd, IV. Reihe. Kleinste Platte.

$$m = 0,636, \quad d_0 = 2,51.$$

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_2/d_1$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
135	40	4,625	0,96		0,665	-0,018	-0,02	389	2392	126	3,2	20	2,3	500	0,0123	6,1
		1,17	1,10													
139	41	3,96	1,06		0,598	0,025	-0,02	437	2302	124	3,2	20	2,3	491	0,0124	6,1
		1,19	1,09													
141	42	3,33	1,16		0,522	0,065	0,00	489	2163	124	3,2	19	2,3	488	0,0127	6,2
		1,18	1,09													
143	43	2,82	1,27		0,450	0,104	+0,02	546	2046	124	3,2	19	2,3	500	0,0126	6,3
		1,19	1,10													
142	44	2,37	1,40		0,375	0,146	+0,04	617	1945	125	3,2	20	2,3	517	0,0129	6,7
		1,19	1,13													
140	45	1,998	1,59		0,301	0,201	0,00	738	1959	124	3,1	20	2,3	537	0,0127	6,8
		1,18	1,12													
141	46	1,70	1,78		0,230	0,250	0,00	867	1960	126	3,1	20	2,3	570	0,0129	7,4
		1,19	1,12													
141	47	1,432	1,99		0,156	0,299	0,00	1021	1944	126	3,2	20	2,3	600	0,0129	7,7
		1,18	1,11													
142	48	1,217	2,21		0,085	0,344	0,00	1194	1932	126	3,1	20	2,3	638	0,0127	8,1
		1,19	1,11													
146	49	1,02	2,46		0,009	0,391	+0,02	1413	1915	127	3,1	20	2,3	679	0,0131	8,9
		1,19	1,13													
142	50	0,86	2,78		-0,066	0,444	0,00	1714	1960	127	3,1	20	2,3	735	0,0133	9,8
		1,16	1,14													
142	51	0,74	3,18		-0,131	0,502	-0,12	2118	2084	126	3,2	20	2,2	805	0,0130	10,5
		1,19	1,12													
138	52	0,62	3,55		-0,208	0,550	-0,14	2519	2076	127	3,2	20	2,3	856	0,0129	11,0
		1,13	1,02													
137	53	0,55	3,61		-0,260	0,558	+0,06	2966	2168	126	3,1	20	2,2	931	0,0129	12,0
		1,16	1,07													
	54	0,475	3,88		-0,323	0,589	+0,14	3526	2226	124	3,1	21	2,2	988	0,0127	12,5
		1,16	1,10													
	55	0,408	4,25		-0,389	0,628	+0,19	4240	2300	127	3,0	21	2,2	1088	0,0127	13,8
		1,17	1,11													
	56	0,35	4,73		-0,456	0,675	+0,16	5223	2430	127	3,0	21	2,2	1180	0,0125	14,7
		1,04	1,06													
	57	0,337	5,0		-0,472	0,699	+0,01	6210	2782	127	3,0	22	2,2	1282	0,0126	16,2
		1,11	1,11													
	58	0,305	5,56		-0,516	0,745	-0,24	7820	3171	128	3,0	23	2,1	1402	0,0123	17,2
		1,18	1,02													
	59	0,258	5,65		-0,588	0,752	+0,27	9342	3203	127	3,0	23	2,1	1530	0,0123	18,8

Während der Druck von 4,6 auf 0,35 mm, also auf den fünfzehnten Teil sinkt, schwankt die genannte Grösse nur zwischen 1915 und 2430. Das Volumen des Dunkelraumes erweitert sich also innerhalb dieses Druckbereiches umgekehrt wie der Gasdruck abnimmt. Dabei ist freilich der auch bei den anderen Gasen hervortretende Gang nicht zu verkennen, daß nämlich die Werte des Produktes aus Druck und Volumen erst sinken, ein Minimum erreichen (etwa bei 1,0 mm) und dann wieder ansteigen, um erst bei sehr niederen Drucken den Mittelwert erheblich zu übersteigen.

Das Wachsen der innersten ersten Goldsteinschen Kathodenschicht erläutert die hier folgende Zahlenreihe, die zu der Messungsreihe IV gehört:

$p = 4,63$	3,96	3,33	2,82	2,37	2,00	1,70	1,43	1,22	1,02
$d' = 0,00$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,15	0,20	0,25	0,32
$p = 0,86$	0,74	0,62	0,55	0,48	0,41	0,35	0,337	0,305	0,258
$d' = 0,40$	0,45	0,48	0,89	1,15	1,34	1,54	1,95	2,27	3,12

Man sieht, wie diese erste Schicht bei sehr tiefen Drucken eine sehr erhebliche Ausdehnung gewinnt, sodaß die Vernachlässigung ihrer Dicke die  $d$ -Werte sehr stark in die Höhe treiben würde.

### 5. Kohlensäure.

In einem Kohlensäureentwicklungsapparat nach Thiele ließ man Natriumkarbonat zu verdünnter Salzsäure tropfen. Das Gas wurde durch Natriumbikarbonat von etwa mitgerissener Salzsäure gereinigt und durch Schwefelsäure getrocknet. Es wurde jedesmal zweimal gespült und mit der dritten Füllung die Messung vorgenommen. Eine Füllung dauerte etwa 1 Stunde.

Bei der Kohlensäure (vgl. Tab. 12, Reihe VI) ist das Wachstum der Dickenwerte  $d$  mit abnehmendem Drucke ein schnelleres als bei Kohlenoxyd ( $m$  hier größer als dort), wenn auch bei hohen Drucken die Dickenwerte selbst zunächst kleiner als bei CO sind. Das Wachsen der Dunkelraumvolumina  $R$  geht bis auf die bei den niedersten Druckwerten erhaltenen Daten demjenigen bei Kohlenoxyd sehr nahe parallel; für  $R.p$  gilt auch hier das p. 96 Gesagte.

Die  $d$ -Werte der Tab. 12 zeigen am Schlusse größere einseitige Abweichungen, als sie sonst vorkommen; der Grund liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit, auf die innere Grenze der bei tiefen Drucken bei diesem Gase schon sehr verwaschenen Glimmlichtschicht scharf einzustellen.

Tabelle 12.

Kohlensäure, VI. Reihe. Kleinste Platte.

 $m = 0,769$ ,  $d_0 = 2,61$ .

Nr.	$p$	$p_1/p_2$	$d$	$d_1/d_2$	$\log p$	$\log d$	$\delta$	$R$	$R.p$	$S$	$A$	$v$	$J$	$V$	$i$	$E$
360	3,518	1,16	1,0	1,10	0,546	0,000	-0,01	408	1908	128	3,2	20	2,4	485	0,0133	6,4
361	3,04	1,18	1,1	1,13	0,483	0,041	0,00	458	1851	128	3,2	20	2,4	482	0,0131	6,3
362	2,58	1,24	1,2	1,12	0,412	0,093	0,00	530	1817	128	3,3	19	2,4	491	0,0133	6,5
363	2,19	1,39	1,3	1,14	0,340	0,143	+0,04	612	1780	126	3,2	19	2,3	497	0,0131	6,5
364	1,875	1,59	1,5	1,15	0,273	0,201	0,00	726	1809	126	3,2	19	2,3	517	0,0129	6,7
365	1,585	1,83	1,8	1,15	0,200	0,263	-0,01	873	1840	124	3,2	19	2,3	538	0,0126	6,8
366	1,342	2,09	2,0	1,14	0,128	0,320	-0,01	1045	1864	124	3,2	19	2,2	572	0,0127	7,3
367	1,139	2,38	2,3	1,15	0,057	0,377	-0,01	1251	1893	123	3,2	19	2,3	611	0,0127	7,8
368	0,95	2,73	2,7	1,18	-0,022	0,436	0,00	1524	1923	123	3,2	19	2,2	668	0,0125	8,4
369	0,80	3,22	3,2	1,11	-0,097	0,508	-0,12	1949	2072	124	3,2	19	2,2	719	0,0129	9,3
370	0,676	3,59	3,5	1,17	-0,170	0,555	-0,04	2307	2072	124	3,1	20	2,2	782	0,0128	10,0
371	0,568	4,19	4,1	1,13	-0,246	0,622	-0,17	2954	2230	124	3,1	20	2,2	837	0,0123	10,3
372	0,474	4,72	4,7	1,13	-0,324	0,674	-0,11	3603	2271	121	3,1	19	2,1	915	0,0118	10,8
373	0,408	5,33	5,3	1,12	-0,389	0,727	-0,14	4434	2405	119	3,0	20	2,1	1000	0,0118	11,8
374	0,334	5,95	5,9	1,13	-0,476	0,775	+0,09	5384	2390	120	3,0	20	2,0	1070	0,0115	12,3
375	0,271	6,75	6,7	1,13	-0,567	0,829	+0,36	6774	2440	118	3,0	20	2,0	1154	0,0115	13,3
376	0,232	7,6	7,6	1,13	-0,635	0,881	+0,37	8489	2618	118	2,9	20	2,0	1263	0,0111	14,0
377	0,195	8,6	8,6	1,13	-0,710	0,935	+0,52	10810	2802	120	3,0	21	2,0	1372	0,0114	15,6

### Vergleich der Konstantenwerte bei verschiedenen Gasen.

Für die kleinste Plattenelektrode 3 von 0,69 cm Radius und 3,2 cm<sup>2</sup> Oberfläche liegen Messungsreihen für alle fünf der untersuchten Gase vor; die hierbei erhaltenen Resultate eignen sich daher dazu einen Vergleich über das Verhalten dieser Gase untereinander anzustellen. Die den betreffenden Messungsreihen entsprechenden Geraden sind in Fig. 5 in

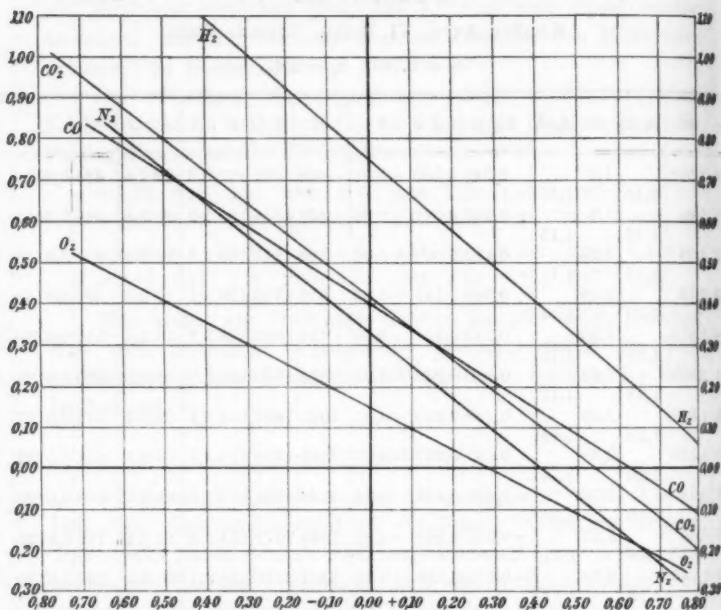


Fig. 5.

dasselbe Koordinatensystem eingetragen; für Sauerstoff wurde eine Linie gewählt, die genau in der Mitte zwischen den beiden einander parallelen und nur ein wenig gegeneinander verschobenen, die Reihen VIII und IX darstellenden Geraden liegt.

Man sieht, daß in Bezug auf die *Kurvenneigung*  $m$  die Gase in zwei Gruppen zerfallen: Bei Wasserstoff, Kohlensäure und Stickstoff ist  $m$  groß, die Dunkelraumdicke wächst rasch mit abnehmendem Drucke; die entsprechenden Geraden verlaufen ein-

ander fast parallel; bei Kohlenoxyd und Sauerstoff hingegen ist  $m$  wesentlich kleiner, der Dunkelraum wächst viel langsamer mit abnehmendem Drucke.

Was die Kurvenhöhe betrifft, so beurteilt man sie am besten nach der Ordinatenhöhe, welche von der Linie  $\log p = 0$  von den einzelnen Geraden abgeschnitten wird, d. h. nach der Größe von  $\log d_0$ .

Nach der absoluten Größe des Dunkelraumes bei demselben Drucke ordnen sich die Gase in den beiden Gruppen wie folgt: Wasserstoff, Kohlensäure, Stickstoff einerseits; Kohlenoxyd, Sauerstoff andererseits, sodaß Wasserstoff die größten, Sauerstoff die kleinsten Dunkelräume bei gleichen Drucken besitzt.

Eine einfache Beziehung zur mittleren freien Weglänge existiert nicht, sonst könnte Sauerstoff nicht so tief, Kohlensäure nicht so hoch erscheinen.

Wie schon oben p. 90 erwähnt, steht die Reihenfolge, nach der sich die Gase ihren  $d_0$ -Werten entsprechend ordnen lassen, in einer bemerkenswerten Beziehung zu derjenigen Folge, in der sie erscheinen würden, wenn man sie nach ihrem Wattverbrauche bei entsprechenden Drucken ordnen würde: ein Parallelismus ist hier unverkennbar, wie die folgende Zusammenstellung der  $d_0$ - und der  $E$ -Werte für den Vergleichsdruck  $p = 1,0$  mm unmittelbar ersichtlich macht:

## Gruppe I.

	H <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>
$d_0 =$	5,59	2,61	2,11
$E =$	10,0	8,2	7,7

## Gruppe II.

	CO	O <sub>2</sub>
$d_0 =$	2,51	1,41
$E =$	8,9	6,6

*Je größer der Dunkelraum, umsomehr Energie wird caet. par. konsumiert.* Es gewinnt also den Anschein, als ob ein nicht unbeträchtlicher Anteil der zur Einleitung und Unterhaltung der Gasentladung nötigen Energie zur Ausbildung des Dunkelraumes verwendet würde.

Vergleicht man die Werte des vom dunklen Raum erfüllten Gasvolumens  $R$  für die verschiedenen Gase bei denselben

Drucken, was am besten vermittle der graphischen Aufzeichnung aller für Platte 3 mitgeteilten Werte (Fig. 6) geschieht, so sieht man, daß auch hier *Wasserstoff* und *Sauerstoff* die beiden Extreme bilden; für *Wasserstoff* ist das *Dunkelraumvolumen* durchweg größer, für *Sauerstoff* durchweg kleiner als für alle anderen Gase. Die Volumengrößen für  $N_2$ ,  $CO$  und  $CO_2$  zeigen

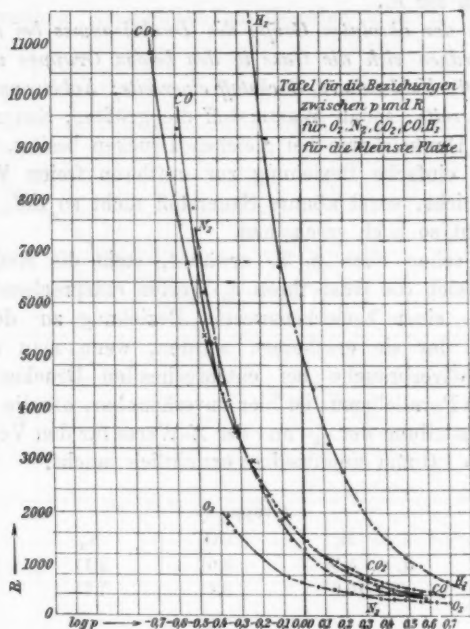


Fig. 6.

sehr nahe denselben Gang der Beziehung zwischen  $p$  und  $R$ , der sich näher demjenigen des  $O_2$  als dem des  $H_2$  anschließt.

Bei allen Gasen steigt das Volumen  $R$  stark mit abnehmendem Drucke. Um in die funktionelle Abhängigkeit einen näheren Einblick zu gewinnen, wurde in die Tabellen noch das Produkt  $p \cdot R$  mit aufgenommen (in Erg ausgedrückt vgl. oben p. 79). Die graphische Aufzeichnung der den verschiedenen Gasen entsprechenden Wertreihen für dieselbe Elektrode (Fig. 7, p. 103) zeigt, daß wiederum  $O_2$  die untere Grenze,  $H_2$  die



obere des Flächenstreifens bilden, auf dem sich die  $R \cdot p$ -Kurven für  $N_2$ ,  $CO$  und  $CO_2$  ziemlich eng zusammendrängen. Für keines der untersuchten Gase resultiert eine Gerade, für keines wächst also das Dunkelraumvolumen umgekehrt proportional dem Drucke, bei  $H_2$  findet sogar ein sehr ausgesprochenes einseitiges Ansteigen statt; das Volumen  $R$  wächst schneller als der Druck abnimmt. Ein Gesetz etwa von der Form  $R \cdot p^2$  würde noch viel weniger eine Gerade liefern. Für die anderen

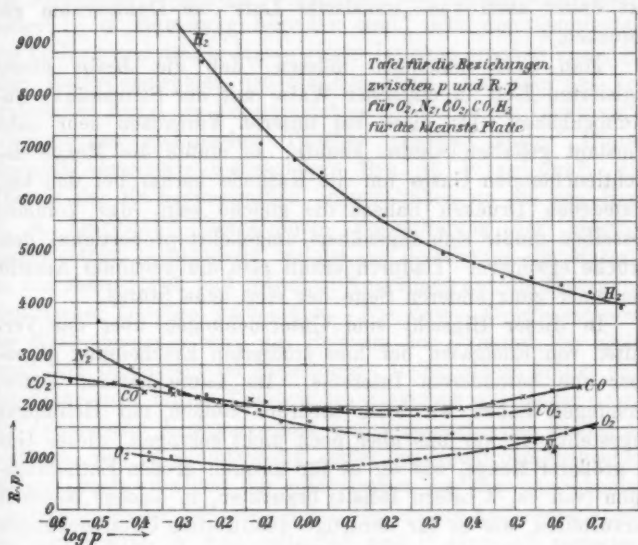


Fig. 7.

Gase findet zunächst ein Abnehmen bis zu einem Minimum, dann wieder bei den tieferen Drucken ein Ansteigen der  $R \cdot p$ -Werte statt, doch sind die Wertänderungen von  $R \cdot p$  mit  $p$  gering, sodaß man innerhalb gewisser Druckgrenzen von einem Konstantbleiben dieser Größen sprechen kann. Innerhalb dieser Grenzen wächst also das Dunkelraumvolumen umgekehrt, wie der Druck abnimmt. Dieses Übergehen unseres Gesetzes I in das Boyle-Mariottesche für die Volumina der Dunkelräume scheint nicht ohne eine gewisse Bedeutung zu sein. Hr. O. Lehmann hat in der oben p. 72 angeführten Arbeit

die schon früher von ihm geäußerte Ansicht eingehender begründet, daß der Dunkelraum um die Kathode herum erfüllt sei mit positiv elektrisierter Luft, welche ihre Elektrizität nicht an die Elektrodenplatte abzugeben vermag; sie sammelt sich daher hier an und leuchtet deshalb nicht, weil das Leuchten immer nur auf diejenigen Gegenden im Gase beschränkt zu sein scheint, wo Trennung oder Vereinigung zwischen den einzelnen Teilprodukten der Gasmoleküle stattfindet. Man hat daher auch von „ionisierter Luft“ im Dunkelraum gesprochen.

Man wird annehmen müssen, daß die *Menge* dieser ionisierten Luft in einfacher Weise mit der Stromstärke zusammenhängt. Da diese bei unseren Versuchen sehr nahe konstant gehalten werden konnte, so mußte die *Menge* des nichtleuchtenden Gases um die Kathode herum bei den verschiedenen Drucken nahezu die gleiche sein, das Volumen desselben mußte sich angenähert umgekehrt proportional dem Drucke erweitern. Dadurch erhält also die genannte Ansicht von einer ganz anderen Seite her eine neue Stütze.

In dieser Hinsicht sind Untersuchungen über das Verhalten von Edelgasen der hier studierten Erscheinung gegenüber von besonderem Interesse. Im Laufe unserer Untersuchungen haben wir auch mehrere Reihen mit Heliumgas angestellt; es war uns aber noch nicht gelungen, dieses Gas in größerer Menge, wie wir es für unseren großen Entladungsraum (von ca. 4 Litern Inhalt) brauchten, in solcher Reinheit herzustellen, wie es für derartige quantitative Untersuchungen unbedingt notwendig ist; wir sind aber damit beschäftigt, die Messungen auch auf Argon und Helium auszudehnen.

München, Phys. Inst. d. techn. Hochsch., Oktober 1902.

(Eingegangen 13. Oktober 1902.)

---

#### 4. Prinzipien der Dynamik des Elektrons; von Max Abraham.

##### § 1. Einleitung und Inhaltsübersicht.

Die Arbeiten zahlreicher Physiker haben zu der Hypothese geführt, daß in den Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen die Atome der negativen Elektrizität, die sogenannten „Elektronen“<sup>1)</sup>, in Bewegung begriffen sind. Für den Quotienten aus Ladung und träger Masse dieser Teilchen ergaben Versuche über Kathodenstrahlen den gleichen Wert, den man aus der einfachsten Form des Zeemaneffektes für die in der Lichtquelle schwingenden elektrischen Teilchen erhalten hatte. Dieses Resultat veranlaßte insbesondere Hr. E. Wiechert<sup>2)</sup>, die Theorie der Kathodenstrahlen anzuschließen an die von Hr. H. A. Lorentz<sup>3)</sup> herrührende Formulierung der elektromagnetischen Lichttheorie, welche die Beteiligung der Materie an den elektrischen und optischen Vorgängen auf die Bewegung elektrischer Teilchen zurückführt. Für diese „*Elektronentheorie der Elektrodynamik*“ wird das Problem der Dynamik des Elektrons von fundamentaler Bedeutung. Insbesondere drängt sich die Frage auf: Ist die Trägheit des Elektrons vollständig durch die dynamische Wirkung seines elektromagnetischen Feldes zu erklären, oder ist es notwendig, außer der „elektromagnetischen Masse“ noch eine von der elektrischen Ladung unabhängige „materielle Masse“ heranzuziehen? Die erstere Auffassung wurde von den Herren W. Sutherland<sup>4)</sup> und P. Drude<sup>5)</sup> vertreten. Wie die Herren Th. des Coudres<sup>6)</sup> und H. A. Lorentz<sup>7)</sup> be-

1) Vgl. W. Kaufmann, Die Entwicklung des Elektronenbegriffes, Verhandl. der 73. Naturforscherversammlung in Hamburg p. 115; Physik. Zeitschr. 3. p. 9. 1901.

2) E. Wiechert, Göttinger Nachrichten p. 87. 1898; Grundlagen der Elektrodynamik p. 98. Leipzig 1899.

3) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

4) W. Sutherland, Phil. Mag. 47. p. 269. 1899.

5) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 566 u. p. 609. 1900.

6) Th. des Coudres, Verhandl. d. phys. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 60. 1898.

7) H. A. Lorentz, Physik. Zeitschr. 2. p. 78. 1900.

merkten, hängt die Entscheidung jener Frage ab von den Trägheitserscheinungen, welche die Elektronen bei größeren, gegen die Lichtgeschwindigkeit nicht mehr zu vernachlässigenden Geschwindigkeiten zeigen; in der Tat, eine etwa vorhandene materielle Masse, die dem Teilchen als solchem anhaftet, wäre von der Bewegung unabhängig, die durch den elektromagnetischen Feldmechanismus bedingte Trägheit hingegen muß eine Funktion der Geschwindigkeit sein. Gelingt es, die Dynamik des Elektrons ohne Heranziehung einer materiellen Trägheit aufzubauen, so eröffnet sich die Perspektive auf eine elektromagnetische Begründung der gesamten Mechanik.<sup>1)</sup>

Jenes für die Elektrodynamik wie für die Mechanik fundamentale Problem erschien seiner Lösung nähergerückt, als Hr. W. Kaufmann<sup>2)</sup> durch Versuche über die elektrische und magnetische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen nachwies, daß die Geschwindigkeit der Elektronen hier nicht weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt, und daß ihre träge Masse wirklich mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt. Indessen war eine Entscheidung der Frage, ob die experimentell gefundene Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit sich rein elektromagnetisch deuten läßt, bei dem damaligen Stande der Theorie nicht möglich. Hr. O. Heaviside<sup>3)</sup> hatte zwar die magnetische Energie eines langsam bewegten Elektrons berechnet; allein der Versuch Hrn. J. J. Thomsons<sup>4)</sup>, die „scheinbare“ Masse des kugelförmigen Elektrons bei großen Geschwindigkeiten zu bestimmen, ist als mißglückt zu bezeichnen. Erfolgreicher waren die theoretischen Untersuchungen der Herren W. B. Morton<sup>5)</sup> und G. F. C. Searle<sup>6)</sup> über das Feld gleichförmig bewegter elektrisch geladener Leiter von ellipsoidischer Gestalt; dieselben führten zur Kenntnis der elektromagnetischen Energie des Elektrons; aus dieser läßt sich indessen nur die „longitudinale“ Masse berechnen, die sich einer

1) W. Wien, Arch. Néerland. (2) 5. p. 96. 1900. (Lorentz-Festschrift); Ann. d. Phys. 5. p. 501. 1901.

2) W. Kaufmann, Göttinger Nachrichten p. 143. 1901.

3) O. Heaviside, Phil. Mag. 27. p. 324. 1889; Electrical Papers 2. p. 505.

4) J. J. Thomson, Recent researches p. 21. 1893.

5) W. B. Morton, Phil. Mag. 41. p. 488.

6) G. F. C. Searle, Phil. Trans. 187 A. p. 675. 1896; Phil. Mag. 44. p. 329. 1897.

Beschleunigung in der Bewegungsrichtung widersetzt, die „transversale“ Masse, die gerade bei Ablenkungsversuchen in Rechnung zu ziehen ist, wird durch die Energie nicht bestimmt. Andererseits enthalten die Formeln für die longitudinale und transversale Masse, die Hr. H. A. Lorentz ohne Angabe des Beweises mitteilte<sup>1)</sup>, nur die beiden ersten Glieder von Reihenentwicklungen, die nach Potenzen des Geschwindigkeitsquadrates fortschreiten; für Kathodenstrahlen geben sie eine genügende Annäherung, für Becquerelstrahlen keineswegs. Das war der Stand der Theorie, als ich meine erste Arbeit über die Dynamik des Elektrons<sup>2)</sup> veröffentlichte. Die Formel für die transversale elektromagnetische Masse, die ich ableitete, schien zwar zunächst die empirisch gefundene Abhängigkeit von der Geschwindigkeit nicht recht befriedigend darzustellen. Es gelang indessen Hrn. W. Kaufmann<sup>3)</sup>, nach Korrektur eines früher untergelaufenen Rechenfehlers, die Theorie mit der Beobachtung in Übereinstimmung zu bringen, indem er durch eine geeignete Methode diejenigen Fehler eliminierte, die von der ungenauen Kenntnis der Feldstärken des ablenkenden elektrischen und magnetischen Feldes herrührten. Weitere genauere Messungen bestätigten<sup>4)</sup> die Richtigkeit der aus der elektromagnetischen Theorie abgeleiteten Formel innerhalb der Fehlergrenze der Versuche. So konnte das Resultat ausgesprochen werden: *Die Masse des Elektrons ist rein elektromagnetischer Natur.*

In der vorliegenden Abhandlung, über deren Inhalt ich bereits auf der Karlsbader Naturforscherversammlung berichtet<sup>5)</sup> habe, stelle ich mir die Aufgabe, die *Dynamik des Elektrons auf rein elektromagnetischer Grundlage aufzubauen*. Ich schreibe dem Elektron *Kugelgestalt* zu, und eine in konzentrischen Kugelschichten homogene Verteilung der Ladung; insbesondere werden die beiden einfachsten Annahmen *homogener Volumenladung und homogener Flächenladung* bevorzugt. Daneben allerdings operiere ich auch mit homogener Volumen- oder Flächen-

1) H. A. Lorentz, Physik. Zeitschr. 2. p. 78. 1900.

2) M. Abraham, Göttinger Nachrichten p. 20. 1902.

3) W. Kaufmann, Göttinger Nachrichten p. 291. 1902.

4) W. Kaufmann, Verhandl. der 74. Naturforscherversammlung in Karlsbad; Physik. Zeitschr. 4. p. 54. 1902.

5) M. Abraham, Verhandl. der 74. Naturforscherversammlung in Karlsbad; Physik. Zeitschr. 4. p. 57. 1902.

ladung eines Ellipsoides, um zu unterscheiden, welche Resultate aus den allgemeinen Grundgleichungen, und welche aus der speziellen Annahme der allseitigen Symmetrie des Elektrons folgen.

Drei Systeme von Grundgleichungen sind es, auf denen die Dynamik des Elektrons beruht. Die erste „*kinematische Grundgleichung*“ (I) schränkt die Freiheit der Bewegung des Elektrons ein, das System der „*Feldgleichungen*“ (II) ergibt das vom Elektron erregte elektromagnetische Feld, während das dritte System der „*dynamischen Grundgleichungen*“ (III) die Bewegungen bestimmt, die das Elektron in einem gegebenen äußeren Felde ausführt.

Die in der ersten Grundgleichung enthaltene Kinematik des Elektrons stimmt mit derjenigen des starren Körpers überein; *wie die Materie an den Volumenelementen des starren Körpers, so haftet die Elektrizität an den Volumenelementen des starren Elektrons*. Diese kinematische Grundhypothese mag manchem willkürlich erscheinen; mancher wird, auf die Analogie der gewöhnlichen, elektrisch geladenen festen Körper sich berufend, die Vorstellung vertreten, daß die ganz enormen Feldstärken, die an der Oberfläche des Elektrons herrschen — dieselben übertreffen die unserer Messung zugänglichen um das Billionenfache — im stande sind, das Elektron zu deformieren; am kugelförmigen Elektron würden sich alsdann die elektrischen und die elastischen Kräfte das Gleichgewicht halten, so lange als das Elektron ruht; durch die Bewegung des Elektrons aber würden die Kräfte des elektromagnetischen Feldes, und daher auch die Gleichgewichtsform des Elektrons geändert werden. Es ist nicht diese Vorstellung, die zur Übereinstimmung mit dem Experiment geführt hat. Auch schien mir die Annahme eines deformierbaren Elektrons aus prinzipiellen Gründen unzulässig zu sein. Denn sie führt zu der Konsequenz, daß bei der Formänderung von den elektromagnetischen Kräften, oder gegen sie Arbeit geleistet wird, daß also außer der elektromagnetischen Energie eine innere potentielle Energie des Elektrons heranzuziehen ist. Wäre das wirklich notwendig, so wäre bereits die elektromagnetische Begründung der Theorie der Kathoden- und Becquerelstrahlung, eines rein elektrischen Vorganges, unmöglich, dann wäre auf die elektromagnetische Begründung der Mechanik von vorn-

herein zu verzichten. Es ist nun unser Ziel, die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch zu begründen; daher dürfen wir ihm ebensowenig Elastizität, wie materielle Masse zuschreiben. Wir hoffen umgekehrt die Trägheit und die Elastizität der Materie auf Grund der elektromagnetischen Auffassung verstehen zu lernen.

Eine der soeben angedeuteten verwandte Überlegung mag Heinrich Hertz geleitet haben, als er in seinen „Prinzipien der Mechanik“ nur solche kinematische Zusammenhänge zuließ, deren Bestehen weder Erzeugung noch Zerstörung kinetischer Energie bedingt. Das war notwendig, weil er alle Energie auf kinetische Energie bewegter Massen, alle Kräfte auf kinematische Verbindungen zurückführen wollte. Dem Einwande, daß wir starre Verbindungen in Wirklichkeit nur angenähert realisiert finden, begegnet Hertz mit den Worten<sup>1)</sup>: „auf der Suche nach den wirklichen starren Verbindungen wird unsere Mechanik vielleicht zur Welt der Atome herabzusteigen haben“. Nun, die elektromagnetische Mechanik steigt noch weiter herab; in den Atomen der negativen Elektrizität, diesen Kugeln, deren Radius nur den billionten Teil eines Millimeters beträgt, nimmt sie eine starre, unveränderliche Anordnung der elektrischen Ladung an. Daß es zulässig ist, von starren Verbindungen zu reden, bevor man von Kräften gesprochen hat, das hat Hertz überzeugend dargetan. Unsere Dynamik des Elektrons unterläßt es überhaupt, von Kräften zu reden, die das Elektron zu deformieren bestrebt sind. Sie spricht nur von „äußeren Kräften“, die ihm eine Geschwindigkeit oder Drehgeschwindigkeit zu erteilen vermögen, und von „inneren Kräften“, die, vom Felde des Elektrons herrührend, jenen das Gleichgewicht halten. Und auch diese „Kräfte“ und „Drehkräfte“ sind nur Hilfsbegriffe, die definiert werden durch die kinematischen und die elektromagnetischen Grundbegriffe. Das Gleiche gilt von Worten wie „Arbeit“, „Energie“, „Bewegungsgröße“, bei deren Wahl allerdings das Bestreben maßgebend war, die Analogie der elektromagnetischen Mechanik zur gewöhnlichen Mechanik materieller Körper deutlich hervortreten zu lassen.

Die Feldgleichungen und die dynamischen Grundgleichungen

---

1) H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik p. 41. Leipzig 1894.



werden im zweiten Abschnitte in Anlehnung an die Lorentzsche Theorie entwickelt. Im dritten Paragraphen wird nachgewiesen, daß man aus dieser Theorie nicht nur eine *elektromagnetische Energie*, sondern auch eine *elektromagnetische Bewegungsgröße* ableiten kann. Das hat zuerst Hr. Poincaré<sup>1)</sup> hervorgehoben; er zeigte, daß bei Einführung einer solchen der Schwerpunktsatz für Elektronensysteme gilt, und behauptete von dem Flächensatz das Gleiche. Die Existenz einer elektromagnetischen Bewegungsgröße ist für die Dynamik des Elektrons von fundamentaler Bedeutung. Sie allein ermöglicht die Zurückführung der inneren Kräfte auf einen vom elektromagnetischen Felde des Elektrons abhängigen „Impuls“ und „Drehimpuls“, und gestattet so eine vereinfachte Berechnung der elektromagnetischen Masse und des elektromagnetischen Trägheitsmomentes. Von ihr hängt auch das sehr bemerkenswerte Resultat ab, daß die Dynamik der wichtigsten Klasse von Bewegungen des Elektrons, der „ausgezeichneten Bewegungen“, sich in die analytische Mechanik Lagranges einordnen läßt. Ich habe darum geglaubt, eine neue Ableitung der elektromagnetischen Bewegungsgröße geben zu sollen; mit Hülfe von Vektoranalysis wird der skalare Ausdruck für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte umgeformt und so gleichzeitig die Poincarésche Transformation der inneren Kraft und die entsprechende der inneren Drehkraft erhalten. Durch Einführung des transformierten Ausdruckes der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte wird ferner, im vierten Paragraphen, die dynamische Grundgleichung (III) auf eine Form (VII) gebracht, die dem *d'Alembertschen Prinzip* entspricht; auch ergeben sich die „*Bewegungsgleichungen*“ (VII a, b) des Elektrons, welche die zeitlichen Änderungen des Impulses und des Drehimpulses bestimmen. Die größere Schwierigkeit der mathematischen Behandlung dieser Bewegungsgleichungen gegenüber den Bewegungsgleichungen der gewöhnlichen Mechanik ist darin begründet, daß Impuls und Drehimpuls nicht in einer gleichzeitig allgemeinen und strengen Weise als Funktionen der jeweiligen Geschwindig-

1) H. Poincaré, Arch. Néerland. (2) 5. p. 252. 1900. (Lorentz-Festschrift.) Eine eigentümliche Ableitung der elektromagnetischen Bewegungsgröße aus dem Impulse bewegter Faradayscher Röhren gab J. J. Thomson, Rec. res. p. 9 1893.



keit und Drehgeschwindigkeit zu bestimmen sind, sondern für jede einzelne Bewegung, ihrer Vorgeschichte gemäß, gesondert durch Integration der Feldgleichungen ermittelt werden müssen.

Im fünften Abschnitte gelangen wir, nachdem die Feldgleichungen auf ein im Elektron festes Koordinatensystem bezogen sind, zu der Einsicht, daß eine Klasse „*ausgezeichneter Bewegungen*“ besondere Beachtung verdient. Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, daß das Feld, beurteilt von einem mit dem Elektron starr verbundenen Gerüst aus, stationär ist, und durch die hiermit verknüpfte Eigenschaft des für die inneren Kräfte maßgebenden Vektors, der Gradient eines „*Konvektionspotentials*“ zu sein. Zu den ausgezeichneten Bewegungen gehört unter anderen gleichförmige Translation und gleichförmige Rotation.

Reine Translation wird in den nächsten vier Paragraphen (6—9) untersucht. Die Gesetze des Feldes, das von einem gleichförmig bewegten Elektron erregt wird, sind im wesentlichen bereits in den oben zitierten Arbeiten der Herren Morton und Searle enthalten; unbekannt aber blieb jenen Autoren die aus den Feldgesetzen folgende Tatsache, daß Impuls und Energie sich in der aus der analytischen Mechanik bekannten Art aus der „*Lagrangeschen Funktion*“ ableiten lassen, einer Funktion, die definiert ist als Differenz der magnetischen und elektrischen Energie, und die sich ausdrückt durch ein über das Volum des Elektrons erstrecktes, vom Konvektionspotential abhängiges Integral. Für reine Translation gilt das erste Axiom Newtons. Es gilt auch das zweite Axiom, d. h. es läßt sich eine „*elektromagnetische Masse*“ definieren; dieselbe ist freilich kein Skalar, wie die Masse der gewöhnlichen Mechanik, sondern ein Tensor von rotatorischer Symmetrie, dessen Komponenten, die longitudinale und die transversale Masse, in verschiedener Weise von der Geschwindigkeit abhängen. Allerdings gilt das zweite Axiom nur für quasistationäre, d. h. für nicht zu rapide beschleunigte Bewegungen; es zeigt sich jedoch, daß in praxi alle beobachtbaren Geschwindigkeitsänderungen und Ablenkungen durchaus quasistationär erfolgen.

Im zehnten Abschnitt wird die allgemeine Untersuchung der „*ausgezeichneten Bewegungen*“ wieder aufgenommen. Eine Betrachtung, die sich auf den Energiesatz und auf die Impulssätze stützt, führt zu dem Resultat, daß für stationäre und

quasistationäre Bewegungen dieser Klasse die *Lagrangeschen Gleichungen* gelten. Im elften Paragraphen wird die Anwendung auf die Rotation des Elektrons gemacht, im zwölften diejenige auf translatorische Bewegung eines Ellipsoides.

Die mathematische Formulierung aller der zu entwickelnden Beziehungen gewinnt nicht nur größere Eleganz, sondern auch engeren Anschluß an die physikalische Auffassung, wenn man die Vektorenrechnung verwendet. Was die geometrische Bedeutung der Begriffe und Symbole dieses Kalküls anbelangt, so verweise ich auf meinen Artikel in der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften<sup>1)</sup>; ich begnüge mich hier damit, die im folgenden gebrauchten Symbole und Rechnungsregeln zusammenzustellen. Dabei werden Vektoren im allgemeinen mit deutschen Lettern bezeichnet, ihre Komponenten durch den Index kenntlich gemacht. Wir definieren folgende

Symbole:

$(\mathfrak{A} \mathfrak{B})$ , das „innere Produkt“ der Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , ist der *Skalar*:

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

$[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ , das „äußere Produkt“ der Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , ist der *Vektor*, dessen Komponenten sind:

$$\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z, \quad \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x.$$

$\text{div } \mathfrak{A}$ , die „Divergenz“ des Vektors  $\mathfrak{A}$ , ist der *Skalar*:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}.$$

Häufig verwandt wird die als „*Gaußscher Satz*“ bekannte Transformation eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral:

$$\iiint d\tau \text{div } \mathfrak{A} = \iint d\sigma \mathfrak{A}_n.$$

$\text{curl } \mathfrak{A}$ , der „*Curl*“ des Vektors  $\mathfrak{A}$ , ist der *Vektor*, dessen Komponenten sind:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.$$

$\text{grad } \varphi$ , der „*Gradient*“ des Skalars  $\varphi$ , ist ein *Vektor* mit den Komponenten:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$\Delta \varphi$  ist der *Skalar*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

1) M. Abraham, Encyclopädie d. mathem. Wissensch. 4. Art. 14.

$\Delta \mathfrak{A}$  ist der Vektor mit den Komponenten:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2}.$$

$(\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B}$  ist der Vektor, dessen Komponenten sind:

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z}, \quad \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z},$$

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}.$$

Auch der mit der Vektoranalysis nicht Vertraute überzeugt sich durch Nachrechnen leicht von der Gültigkeit folgender

### Rechnungsregeln:

- a)  $(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{A})$ .
- $\beta$ )  $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B} \mathfrak{A}]$ .
- $\gamma$ )  $([\mathfrak{A} \mathfrak{B}], \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}, [\mathfrak{B} \mathfrak{C}])$ .
- $\delta$ )  $[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B} \mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A} \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A} \mathfrak{B})$ .
- $\epsilon$ )  $\operatorname{div} \varphi \mathfrak{A} = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{A} - (\mathfrak{A} \operatorname{grad} \varphi)$ ; vermöge des Gaußschen Satzes kann man diese Rechnungsregel auch schreiben:

$$\iint d\sigma \varphi \mathfrak{A}_r = \iiint d\tau \varphi \operatorname{div} \mathfrak{A} - \iiint d\tau (\mathfrak{A} \operatorname{grad} \varphi).$$

- $\zeta$ )  $\operatorname{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = (\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A}) - (\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B})$ ; der Gauß'sche Satz ergibt:

$$\iint d\sigma [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]_r = \iiint d\tau (\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A}) - \iiint d\tau (\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}).$$

- $\eta$ )  $\operatorname{curl} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A} - (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}$ .
- $\theta$ )  $-\operatorname{grad} (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = [\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A}] + (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A}$ .
- $i$ )  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi$ .
- $x$ )  $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = -\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$ .

Wir geben eine Übersicht über die wichtigsten der im folgenden benutzten

### Bezeichnungen.

$t$  = Zeit.

$x, y, z$  = Kartesische Koordinaten.

$d\tau$  = Volumenelement.

$d\sigma$  = Flächenelement der Begrenzung des Feldes.

$r$  = äußere Normale desselben.

$\mathfrak{q}$  = Vektor der Translationsgeschwindigkeit des Elektrons.

$\mathfrak{s}$  = Vektor der Rotationsgeschwindigkeit.

$\mathfrak{x}$  = Vektor, der den Abstand eines Punktes des Elektrons vom Mittelpunkt anzeigt.

$\mathbf{v} = \mathbf{q} + [\partial \mathbf{r}]$  = Geschwindigkeitsvektor des Punktes.

$\delta \mathbf{s}$  = Vektor der virtuellen Verrückung.

$\xi \eta \zeta$  = dessen Komponenten.

$q$  = Betrag der translatorischen Geschwindigkeit.

$c$  = Lichtgeschwindigkeit.

$\beta = \frac{q}{c}$  Quotient der beiden Größen.

$\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  Feldstärken des vom Elektron erregten elektrischen bez. magnetischen Feldes.

$\mathfrak{E}_h, \mathfrak{H}_h$  Feldstärken des äußeren Feldes.

$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{H}], \quad \mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{H}_h].$

$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{E}].$

$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$  = Poynting'scher Strahlvektor.

$W_e, W_m, W$  elektrische, magnetische und gesamte Energie.

$L = W_m - W_e$  = Lagrangesche Funktion.

$\mathfrak{G}, G$  der Impulsvektor bez. sein Betrag.

$\mathfrak{M}$  = Drehimpuls.

$\mathfrak{K}$  = äußere Kraft.

$\mathcal{O}$  = äußere Drehkraft.

$A_i, A_h$  Arbeit der inneren bez. äußeren Kräfte.

$\Phi$  = skalares Potential.

$\mathfrak{A}$  = Vektorpotential.

$\varphi = \Phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \mathfrak{A})$  = Konvektionspotential.

$\varrho$  = räumliche Dichte der Elektrizität.

$e$  = Ladung des Elektrons, in abs. elektrostatischem Maße.

$s = \frac{|e|}{c}$  = Betrag der Ladung, elektromagnetisch gemessen.

$\mu_0$  = elektromagnetische Masse bei geringen Geschwindigkeiten.

$\mu_s = \frac{1}{2} \mu_0 \chi(\beta) = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{1}{\beta^2} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + \frac{2}{1-\beta^2} \right\}$  = longitudinale Masse.

$\mu_r = \frac{3}{2} \mu_0 \psi(\beta) = \frac{3}{2} \mu_0 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left\{ \left( \frac{1+\beta^2}{2\beta} \right) \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\}$  = transversale Masse.

$p$  = elektromagnetisches Trägheitsmoment.

$a$  = Radius des Elektrons.

## § 2. Die Grundgleichungen.

Dem Elektron, dem Atome der negativen Elektrizität, schreiben wir die Ladung  $e$  zu, die wir durch absolute elektrostatische Einheiten ausdrücken. *Das in den Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen bewegte freie Elektron betrachten wir als eine Kugel von dem unveränderlichen Radius  $a$ .* Über die Ver-

teilung der Ladung machen wir die beiden einfachsten Annahmen, die möglich sind. Die Elektrizität soll entweder gleichförmig über das ganze Volumen der Kugel, oder gleichförmig über ihre Oberfläche verteilt sein; diese beiden Fälle werden wir durch die Benennungen „*Volumenladung*“ und „*Flächenladung*“ unterscheiden. Bei den allgemeinen Entwicklungen indessen rechnen wir stets mit einer endlichen, räumlichen Dichte  $\rho$ , indem wir den Fall der Flächenladung als Grenzfall einer gleichförmigen Verteilung über eine sehr dünne, von zwei konzentrischen Kugeln begrenzte Schicht auffassen.

*Die Elektrizität soll, das ist unsere erste Grundhypothese, an den Volumenelementen des starren Elektrons haften, wie die Materie an den Volumenelementen des starren Körpers. Es soll demnach für die Bewegungen des Elektrons, und der an ihm haftenden Elektrizität, die Kinematik des starren Körpers gelten.* Es bezeichne  $q$  den Vektor, welcher die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Elektrons nach Richtung und Betrag anzeigt, oder die „*Translationsgeschwindigkeit des Elektrons*“;  $\vartheta$  sei der Vektor, der durch seinen Betrag die Drehgeschwindigkeit um den Mittelpunkt, durch seine Richtung die Lage der Drehachse angibt; der vom Mittelpunkt nach einem beliebigen Punkte des Elektrons gezogene Radius Vektor werde  $r$  geschrieben; dann ist die Geschwindigkeit der Punkte des Elektrons bestimmt durch die *kinematische Grundgleichung*:

$$(I) \quad v = q + [\vartheta r].$$

Wie in der analytischen Mechanik, so ist es auch in der Dynamik des Elektrons zweckmäßig, neben der wirklich stattfindenden Bewegung eine nur gedachte „virtuelle“ Verrückung der Punkte des Elektrons in Betracht zu ziehen, welche ihrerseits der kinematischen Grundgleichung genügt; wir bezeichnen sie mit  $\delta s$ , ihre Komponenten mit  $\xi, \eta, \zeta$ . Letztere haben die Gleichungen zu erfüllen:

$$(Ia) \quad 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

die aussprechen, daß die virtuelle Verrückung nicht mit Formänderung verbunden sein darf.

Ist die Bewegung des Elektrons bekannt, so ist das vom Elektron erregte elektromagnetische Feld bestimmt durch die *Feldgleichungen der Lorentzschen Theorie*:

$$(II) \quad \begin{cases} a) & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H} - \frac{4\pi e}{c} \cdot v, \\ b) & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}, \\ c) & \text{div } \mathfrak{E} = 4\pi \varrho, \\ d) & \text{div } \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  bezeichnen hier die in absolutem Gaußschen Maße gemessenen Feldstärken des vom Elektron erregten Feldes,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Gegenüber der Hertz-Heavisideschen Form der Feldgleichungen tritt nur insofern eine Änderung ein, als der Leitungsstrom durch Konvektionsstrom ersetzt ist. Dabei ist der Konvektionsstrom stets durch die absolute Bewegung des Elektrons bestimmt; die Feldgleichungen (II) beziehen sich auf ein im Äther festes Koordinatensystem. Es zeigt sich, daß einer bestimmten absoluten Geschwindigkeit der Translation, die gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, in der Dynamik des Elektrons die Bedeutung einer kritischen Geschwindigkeit zukommt.

Es mag bereits hier eine Form der Feldgleichungen angegeben werden, die sich enger an das ursprüngliche Maxwell'sche Gleichungssystem anschließt; ihre Wichtigkeit für die Elektronentheorie ist insbesondere von den Herren Th. des Coudres<sup>1)</sup> und E. Wiechert<sup>2)</sup> hervorgehoben worden. Es seien  $\Phi$ , das „skalare Potential“, und  $\mathfrak{A}$ , das „Vektorpotential“, den folgenden Differentialgleichungen gemäß bestimmt:

$$(II) \quad \begin{cases} e) & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 4\pi \varrho, \\ f) & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{A} = \frac{4\pi e}{c} \cdot v. \end{cases}$$

1) Th. des Coudres, Arch. Néerland. 5. p. 652. 1900. (Lorentz-Festschrift.)

2) E. Wiechert, Arch. Néerland. 5. p. 549. 1900. (Lorentz-Festschrift.); Ann. d. Phys. 4. p. 667. 1901.

Dann ergeben sich durch Differentiation die Feldstärken:

$$(II) \quad \begin{cases} g) \mathfrak{E} = \text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \\ h) \mathfrak{H} = \text{curl } \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Diese Form der Feldgleichungen setzt in Evidenz, daß das Feld angesehen werden kann als Superposition der Erregungen, die von den einzelnen Volumenelementen des Elektrons ausgehend mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum hinaus eilen.

Das Elektron befinde sich nun in einem gegebenen äußeren Felde von den Feldstärken  $\mathfrak{E}_h, \mathfrak{H}_h$ . Zur Bestimmung der Bewegungen, die es ausführt, ist noch eine weitere Grundgleichung notwendig, die „kinetische“ oder „dynamische“ Grundgleichung. Zu dieser führt uns folgende Überlegung. Die Herren H. A. Lorentz und E. Wiechert haben gezeigt, daß man die Kräfte, welche auf ruhende und auf strömende Elektrizität im elektrischen bez. im magnetischen Felde wirken, aus der Elektronentheorie ableiten kann, wenn man für die auf das einzelne Elektron wirkende Kraft den Ansatz macht:

$$\mathfrak{K} = e \mathfrak{F}_h, \quad \mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}_h].$$

Dabei wird das Elektron als Punktladung aufgefaßt. Wir unterscheiden die Volumenelemente des Elektrons, und definieren die auf das Volumenelement  $dv$  wirkende äußere Kraft durch

$$(1) \quad \varrho dv \mathfrak{F}_h, \quad \mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}_h].$$

Nun gilt aber das Maxwell-Hertzsche Prinzip der Einheit der elektrischen und magnetischen Kraft. Dürfen wir diesem Prinzip vertrauen, so müssen wir die Unterscheidung eines von der Anwesenheit des Elektrons unabhängigen „äußeren“ und eines vom Elektron selbst erregten „inneren“ Feldes als eine künstliche ansehen. In Wirklichkeit gibt es immer nur ein einziges Feld von den Feldstärken  $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_h, \mathfrak{H} + \mathfrak{H}_h$ . Demgemäß stellen wir der äußeren Kraft eine *innere, an dem Volumenelement  $dv$  des Elektrons angreifende Kraft* gegenüber:

$$(1a) \quad \varrho dv \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}].$$

Wir bezeichnen ferner die über das Volumen des Elektrons erstreckten Integrale

$$(1b) \quad \delta A_h = \iiint d v \varrho (\mathfrak{F}_h \delta s),$$

$$(1c) \quad \delta A_i = \iiint d v \varrho (\mathfrak{F} \delta s)$$

als virtuelle Arbeit der äußeren bez. der inneren Kräfte, und stellen die Forderung auf: *Für jede virtuelle Verrückung des Elektrons verschwindet die Summe der virtuellen Arbeiten der inneren und äußeren Kräfte.*

$$(III) \quad \delta A_i + \delta A_h = \iiint d v \varrho (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_h, \delta s) = 0.$$

Das ist unsere „*dynamische Grundgleichung*“.

Wenden wir die Gleichung (III) zuerst auf eine virtuelle Translation, alsdann auf eine virtuelle Rotation an, so zerfällt sie in die beiden Vektorgleichungen:

$$\iiint d v \varrho (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_h) = 0,$$

$$\iiint d v \varrho [\mathbf{r}, \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_h] = 0.$$

Wir nennen

$$(1d) \quad \mathfrak{R} = \iiint d v \varrho \mathfrak{F}_h,$$

$$(1e) \quad \Theta = \iiint d v \varrho [\mathbf{r} \mathfrak{F}_h],$$

die *resultierende äußere Kraft bez. Drehkraft*,

$$(1f) \quad \iiint d v \varrho \mathfrak{F}$$

und

$$(1g) \quad \iiint d v \varrho [\mathbf{r} \mathfrak{F}]$$

hingegen die *resultierende innere Kraft bez. Drehkraft*.

Jene beiden, in der skalaren Gleichung (III) enthaltenen Vektorgleichungen besagen dann: *Die resultierenden inneren und äußeren Kräfte und Drehkräfte halten sich das Gleichgewicht*

$$(IIIa) \quad \iiint d v \varrho \mathfrak{F} + \mathfrak{R} = 0,$$

$$(IIIb) \quad \iiint d v \varrho [\mathbf{r} \mathfrak{F}] + \Theta = 0.$$



Die kinematische Grundgleichung (I), die Feldgleichungen (II) und die dynamischen Grundgleichungen (III) das sind die Grundlagen der Dynamik des Elektrons.

### § 3. Elektromagnetische Energie und elektromagnetische Bewegungsgröße.

In diesem Abschnitte sollen aus den Feldgleichungen zwei Sätze abgeleitet werden, die den Sätzen von der Energie und der Bewegungsgröße entsprechen. Die Energetik des elektromagnetischen Feldes ist von Maxwell, Poynting und Hertz entwickelt worden; die Ausdrücke für die elektromagnetische Energie und für die Energiestrahlung, zu denen die Maxwell-Hertzsche Theorie führt, bleiben auch in der Elektronentheorie gültig, wie Hr. H. A. Lorentz zeigte.<sup>1)</sup> Der Vollständigkeit wegen erbringen wir den Beweis.

Die „Leistung der inneren Kräfte“ beträgt

$$\frac{d A_i}{d t} = \iiint d v \varrho (\mathfrak{v} \mathfrak{E}) = \iiint d v \varrho (\mathfrak{v} \mathfrak{E}).$$

Dieser Ausdruck wird durch Heranziehung der Feldgleichung (IIa) auf die Form gebracht

$$\frac{d A_i}{d t} = \frac{c}{4 \pi} \iiint d v \left( \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right);$$

da ferner, nach Rechnungsregel  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \frac{c}{4 \pi} \cdot \iiint d v (\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) &= \frac{c}{4 \pi} \cdot \iiint d v (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}) \\ &\quad - \frac{c}{4 \pi} \iiint d o [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_r, \end{aligned}$$

so folgt, mit Rücksicht auf die Feldgleichung (IIb):

$$(IV) \quad \frac{d A_i}{d t} + \iiint d o \mathfrak{S}_r = - \frac{d}{d t} \iiint \frac{d v}{8 \pi} \{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 \} = - \frac{d W}{d t}.$$

Hier bezeichnet

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \frac{c}{4 \pi} \cdot [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$$

den Poynting'schen Strahlvektor, mithin das zweite Glied der linken Seite die durch die Begrenzungsfläche des Feldes nach

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektr. u. opt. Erscheinungen in bewegten Körpern. p. 22. Leiden 1895.

außen hindurchtretende Strahlung. Die Gleichung IV besagt demnach: *Leistung der inneren Kräfte und Ausstrahlung erfolgen auf Kosten der Größe*

$$(2a) \quad W = \iiint \frac{d\varphi}{8\pi} \{\mathbb{E}^2 + \mathbb{H}^2\},$$

*die man als elektromagnetische Energie des Feldes bezeichnet.*

In entsprechender Weise wie die Existenz einer elektromagnetischen Energie läßt sich auch die Existenz einer elektromagnetischen Bewegungsgröße aus den Feldgleichungen ableiten. Das hat Hr. H. Poincaré, gestützt auf eine zuerst von Hrn. H. A. Lorentz<sup>1)</sup> angegebene Umformung des Ausdrucks (1f) der inneren Kraft, gezeigt<sup>2)</sup>; er hat ohne Angabe des Beweises behauptet, daß der Ausdruck (1g) der inneren Drehkraft eine ähnliche Transformation gestatte. *Wir erhalten die beiden Transformationen mit einem Schlage, indem wir den Ausdruck (1c) für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte mit Hilfe von Vektoranalysis umrechnen.*

Der Vektor  $\delta s$  der virtuellen Verrückung war zunächst nur für die Punkte des Elektrons definiert. Wir erweitern jetzt seine Definition folgendermaßen. *Wir denken uns ein mit dem Elektron starr verbundenes Gerüst konstruiert, das alle Bewegungen des Elektrons mitmacht, die wirklichen, wie die virtuellen.* Wir verstehen jetzt unter  $\delta s$  die virtuelle Verrückung eines Punktes des Elektrons oder des Gerüsts; vermöge dieser erweiterten Definition sind die Komponenten  $\xi \eta \zeta$  der virtuellen Verrückung nunmehr stetige Funktionen der Koordinaten; es gelten im ganzen Raume die Differentialgleichungen

$$(3) \quad 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z};$$

denn Elektron und Gerüst sind nur virtueller Translationen und Rotationen, aber keiner Formänderung fähig.

Den Ausdruck (1c) der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte dürfen wir jetzt als ein über das ganze, von der Fläche 0 begrenzte Feld erstrecktes Integral ansehen, zu dem die außerhalb des Elektrons liegenden Volumenelemente nur darum keine Beiträge liefern, weil sie von elektrischer Ladung frei

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 26.

2) H. Poincaré, Arch. Néerland. (2) 5. p. 252. 1900.

angenommen werden. Wir können dasselbe durch partielle Integration umformen. Wir erhalten zunächst, die Definitionsgleichung (1a) des Vektors  $\mathfrak{F}$ , die Feldgleichungen IIa, c, sowie die Rechnungsregel ( $\gamma$ ) verwendend:

$$\begin{aligned}\delta A_i &= \iiint d v \varrho (\mathfrak{E} \delta s) + \iiint \frac{d v \varrho}{c} ([v \mathfrak{F}], \delta s) \\ &= \frac{1}{4 \pi} \iiint d v (\mathfrak{E} \delta s) \operatorname{div} \mathfrak{E} \\ &\quad + \frac{1}{4 \pi} \iiint d v \left( \operatorname{curl} \mathfrak{F} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, [\mathfrak{F} \delta s] \right).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$(3a) \quad \delta A_i = \delta A_e + \delta A_m,$$

$$(3b) \quad \delta A_e = \frac{1}{4 \pi} \iiint d v (\mathfrak{E} \delta s) \operatorname{div} \mathfrak{E},$$

$$(3c) \quad \delta A_m = \frac{1}{4 \pi} \cdot \iiint d v \left( \operatorname{curl} \mathfrak{F} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, [\mathfrak{F} \delta s] \right).$$

Wir rechnen  $\delta A_e$  und  $\delta A_m$ , den elektrischen und magnetischen Anteil der virtuellen Arbeit  $\delta A_i$ , einzeln um, wobei jetzt die Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{F}$ ,  $\delta s$  als stetige, differenzierbare Funktionen der Koordinaten und der Zeit zu betrachten sind. Die Anwendung der Regel ( $\varepsilon$ ) ergibt:

$$(3d) \quad \delta A_e = \frac{1}{4 \pi} \cdot \iiint d v (\mathfrak{E} \delta s) \mathfrak{E}_r + \frac{1}{4 \pi} \cdot \iiint d v (\mathfrak{E}, \operatorname{grad} (\mathfrak{E} \delta s)).$$

Drückt man das innere Produkt des Vektors  $\mathfrak{E}$  und des Gradienten von  $(\mathfrak{E} \delta s)$  durch die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\delta s$  aus, so bemerkt man, daß die Differentialquotienten von  $\xi \eta \zeta$  nach den Koordinaten nur in solchen Verbindungen eingehen, die infolge der Gleichungen (3) verschwinden. Es wird:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}, \operatorname{grad} (\mathfrak{E} \delta s)) &= - \left\{ \xi \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad + \eta \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} \right) \\ &\quad \left. + \zeta \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Feldgleichung (IIb) läßt sich der Faktor von  $\xi$  auf die Form bringen:

$$\mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial x} + \frac{1}{c} \left\{ \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial t} - \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial t} \right\},$$

entsprechende Ausdrücke gelten für die Faktoren von  $\eta$  und  $\zeta$ . Daher wird

$$(\mathfrak{E}, \text{grad } (\mathfrak{E} \delta s)) = \frac{1}{2} (\delta s, \text{grad } \mathfrak{E}^2) - \left( \delta s, \frac{1}{c} \left[ \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] \right).$$

Da ferner, mit Rücksicht auf Regel (e), und die aus (3) folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \text{div} \delta s &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{2} (\delta s, \text{grad } \mathfrak{E}^2) &= -\frac{1}{2} \text{div } \mathfrak{E}^2 \delta s \end{aligned}$$

zu setzen ist, so erhält der Ausdruck (3d) schließlich die Form:

$$(3e) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A_s &= \frac{1}{8\pi} \cdot \iint d\sigma \{ 2(\mathfrak{E} \delta s) \cdot \mathfrak{E}_r - \mathfrak{E}^2 \delta s \} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c} \left[ \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

$\delta s$  gibt dabei die zur Begrenzung normale Komponente der virtuellen Verrückung an; das Oberflächenintegral hängt nur von der elektrischen Feldstärke, nicht von der magnetischen ab. Ein entsprechendes, nur von der magnetischen Feldstärke abhängiges Oberflächenintegral läßt sich von dem Ausdruck (3e) abspalten.

Die Rechnungsregeln ( $\gamma$ ) und ( $\alpha$ ) beachtend, schreiben wir

$$(3f) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A_m &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint dv (\text{curl } \mathfrak{H}, [\mathfrak{H} \delta s]) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Nun besteht nach Regel ( $\zeta$ ) die Identität:

$$(\text{curl } \mathfrak{H}, [\mathfrak{H} \delta s]) = (\mathfrak{H}, \text{curl } [\mathfrak{H} \delta s]) + \text{div} [\mathfrak{H}, [\mathfrak{H} \delta s]];$$

beide Terme lassen sich umformen. Nach der Regel  $\eta$  wird, mit Rücksicht auf  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$  (Gleichung (II d)) und  $\text{div } \delta s = 0$  (Gleichung (3)):

$$\text{curl } [\mathfrak{H} \delta s] = (\delta s \nabla) \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \nabla) \delta s;$$

man erhält daher:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}, \text{curl } [\mathfrak{H} \delta s]) &= \mathfrak{H}_x \left( \xi \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathfrak{H}_y \left( \xi \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathfrak{H}_z \left( \xi \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right); \end{aligned}$$

denn die von  $(\mathfrak{H} \nabla) \delta s$  herrührenden Terme fallen den Gleichungen (3) zufolge fort. Wir schreiben, Regel  $\varepsilon$  verwendend,

$$(\mathfrak{H}, \text{curl} [\mathfrak{H} \delta s]) = -\frac{1}{2}(\delta s, \text{grad } \mathfrak{H}^2) = \frac{1}{2} \text{div } \mathfrak{H}^2 \delta s.$$

Ferner gilt nach Regel  $\delta$ :

$$[\mathfrak{H}, [\mathfrak{H} \delta s]] = \mathfrak{H}(\mathfrak{H} \delta s) - \mathfrak{H}^2 \delta s.$$

Mithin wird schließlich

$$(\text{curl } \mathfrak{H}, [\mathfrak{H} \delta s]) = \text{div} \{ \mathfrak{H}(\mathfrak{H} \delta s) - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \delta s \},$$

und es nimmt (3f) die Form an:

$$(3g) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A_m &= \frac{1}{8\pi} \cdot \iint d\sigma \{ 2(\mathfrak{H} \delta s) \mathfrak{H}_v - \mathfrak{H}^2 \delta, s \} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Durch Addition von (3e), (3g) erhält man schließlich den *transformierten Ausdruck für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte*:

$$(3h) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A_i &= - \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right) \\ &\quad + \iint \frac{d\sigma}{8\pi} \{ 2(\mathfrak{E} \delta s) \mathfrak{E}_v - \mathfrak{E}^2 \delta, s + 2(\mathfrak{H} \delta s) \mathfrak{H}_v - \mathfrak{H}^2 \delta, s \}. \end{aligned} \right.$$

Das hier auftretende Oberflächenintegral hängt mit den sogenannten „*Maxwellschen Spannungen*“ zusammen. Wir bezeichnen die Kraft, die von den *Maxwellschen Spannungen* des vom Elektron erregten Feldes auf die Flächeneinheit der das Feld einschließenden Fläche  $\sigma$  ausgeübt wird, mit  $\mathfrak{P}$ , deren Komponenten mit  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$ . Dann ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} -X_v &= \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_v - \mathfrak{E}^2 \cos \nu x) + \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_v - \mathfrak{H}^2 \cos \nu x), \\ -Y_v &= \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_v - \mathfrak{E}^2 \cos \nu y) + \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_v - \mathfrak{H}^2 \cos \nu y), \\ -Z_v &= \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_v - \mathfrak{E}^2 \cos \nu z) + \frac{1}{8\pi} (2 \mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_v - \mathfrak{H}^2 \cos \nu z). \end{aligned}$$

Die Komponenten sind mit dem negativen Vorzeichen versehen, weil wir, anders als im allgemeinen üblich ist, unter  $\mathfrak{P}$  diejenige Kraft verstehen, die von dem inneren Teile des Feldes

auf die Fläche 0 ausgeübt wird. Die „virtuelle Arbeit der von den Maxwell'schen Spannungen ausgeübten Kraft“ beträgt

$$(\mathfrak{P} \delta s) = \xi X_r + \eta Y_r + \zeta Z_r = -\frac{1}{8\pi} \{ 2 (\mathfrak{E} \delta s) \mathfrak{E}_r - \mathfrak{E}^2 \delta_r s \\ + 2 (\mathfrak{H} \delta s) \mathfrak{H}_r - \mathfrak{H}^2 \delta_r s \}.$$

Diese Beziehung in (3h) einführend, erhalten wir:

$$(V) \quad \delta A_i + \iint d\sigma (\mathfrak{P} \delta s) = - \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right).$$

Diese Gleichung gilt für jede virtuelle Verrückung des Elektrons und des mit ihm starr verbundenen Gerüsts. Durch Anwendung auf virtuelle Parallelverschiebung gelangt man sofort zur *Lorentz-Poincaréschen Transformation des Ausdrucks der resultierenden inneren Kraft*

$$(Va) \quad \iiint dv \varrho \mathfrak{E} + \iint d\sigma \mathfrak{P} = - \iiint dv \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

durch Anwendung auf virtuelle Drehung zu der entsprechenden *Transformation des Ausdrucks der resultierenden inneren Drehkraft*

$$(Vb) \quad \iiint dv \varrho [\mathbf{r} \mathfrak{E}] + \iint d\sigma [\mathbf{r} \mathfrak{P}] = - \iiint dv \left[ \mathbf{r}, \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right].$$

Die zur Ableitung der Relationen (Va), (Vb) verwandte virtuelle Verrückung war nur eine mathematische Hilfskonstruktion; im Grunde sind zur Herleitung dieser Relationen, ebenso wie zur Herleitung der Relation (IV), nur die Feldgleichungen verwandt worden. Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit zwischen den Relationen (Va), (Vb) und (IV). Es wird jedesmal ein über das Volumen des Elektrons erstrecktes Integral umgeformt in ein über das ganze Feld erstrecktes Volumenintegral, und in ein Flächenintegral; dabei hängt der Integrand des Volumenintegrals vom Felde nur insofern ab, als der nach der Zeit genommene Differentialquotient eines durch die Feldstärken bestimmten Ausdrucks eingeht. Wie diese Form der Relation (IV) es war, welche die Definition einer elektromagnetischen Energie ermöglichte, so führt die entsprechende Form der Relationen (Va), (Vb) zur Definition einer elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Wir wollen zunächst die Deutung, welche wir der Gleichung (IV) gaben, genauer analysieren. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Begrenzung des Feldes durch fremde Körper bestimmt; daß der Poyntingsche Vektor  $\mathfrak{S}$  in der Tat die auf diese Körper fallende Energiestrahlung angibt, sehen wir im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie als durch die Erfahrungen über Lichtstrahlung bewiesen an. Die Relation (IV) widerspricht zunächst dem Energieprinzip; die Leistung der vom Felde auf das Elektron ausgeübten Kraft und die Energiestrahlung auf die das Feld begrenzenden Körper ergeben in Summa nicht Null; wir erhalten aber das Energieprinzip aufrecht, indem wir eine neue, über das Feld mit der Dichte  $1/8\pi\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\}$  verteilte elektromagnetische Energie einführen, auf deren Kosten dann Leistung und Ausstrahlung erfolgen. Eine ganz entsprechende Deutung lassen nun die Relationen (Va), (Vb) zu. Was zunächst die Maxwellschen Spannungen anbelangt, so beweist die experimentelle Bestätigung des Lichtdruckes sowie der aus dem Lichtdruck folgenden Gesetze der Temperaturstrahlung, daß diese Spannungen die vom Felde auf die begrenzenden Körper ausgeübte Kraft richtig bestimmen. Dann aber widerspricht die Relation (Va) zunächst dem dritten Axiome Newtons; die vom Felde auf das Elektron einerseits, auf die begrenzenden Körper andererseits ausgeübten Kräfte heben sich nicht auf, ebenso wenig heben sich der Relation (Vb) zufolge die statischen Momente dieser Kräfte auf. *Wir retten aber das dritte Axiom, indem wir eine neue elektromagnetische Bewegungsgröße einführen, die über das Feld mit der Dichte  $1/c^2 \cdot \mathfrak{S}$  verteilt ist.* An allen Punkten des Feldes, an denen der Poyntingsche Vektor gerade zeitlich variiert, ist eine als dynamische Wirkung jener elektromagnetischen Bewegungsgröße zu deutende Reaktionskraft  $-1/c^2 \partial \mathfrak{S} / \partial t$  pro Volumeneinheit anzunehmen; alle diese Einzelkräfte nach den Regeln der Statik starrer Körper zusammensetzend, erhält man die resultierende Kraft und Drehkraft des Feldes, die teils am Elektron, teils an den begrenzenden Körpern angreifen. Die oben gekennzeichnete Form der Relationen (Va), (Vb) allein ist es, welche die Existenz einer elektromagnetischen Bewegungsgröße bedingt.

## § 4. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons.

Wir nahmen soeben, um die physikalische Bedeutung der Oberflächenintegrale in den Relationen (IV) und (V) zu erläutern, die Grenzfläche des Feldes als durch fremde Körper gegeben an. In Wirklichkeit sind solche Körper stets vorhanden, und bei einer absolut strengen Behandlung des Problems der Elektronenbewegung wäre ihre Anwesenheit zu berücksichtigen. Bei Versuchen mit Kathoden- und Becquerelstrahlen wären die Wände der evakuierten Röhre, bei der elektrischen Ablenkung auch die Kondensatorplatten in Betracht zu ziehen. In diesen Körpern erfolgt die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes nicht gemäß den für den Äther geltenden Feldgleichungen; da wir jene Gleichungen zu Grunde legen, so müssen wir das Feld derart begrenzen, daß alle fremden Körper ausgeschlossen werden. Freilich vom Standpunkte der konsequenten Elektronentheorie aus wird man behaupten, die Materie beeinflusse die Ausbreitung des vom Elektron erregten Feldes nur insofern, als ihre eigenen Elektronen in Bewegung gesetzt werden und ihrerseits elektromagnetische Felder erregen. Bestätigt sich diese Hypothese, so wird man im stande sein, die Rückwirkung jener Körper auf die Bewegung des Elektrons in den Vektor  $\mathfrak{F}_h$  mit aufzunehmen. Bisher ist es indessen nicht gelungen, die Einwirkung der Materie auf die Kathoden- und Becquerelstrahlen vom Standpunkte der elektromagnetischen Theorie aus befriedigend zu erklären. Probleme, bei denen diese Einwirkung wesentlich ins Spiel kommt, wie z. B. die Reflexion der Kathodenstrahlen, die Emission der Becquerelstrahlen, sind daher der theoretischen Behandlung zunächst unzugänglich. *Wir beschränken uns daher auf solche Elektronenbewegungen, welche von der Materie nicht wesentlich beeinflußt sind. Wir ziehen nur rein elektrische und magnetische Einwirkungen in Betracht*, die wir bei der Berechnung der Feldstärken  $\mathfrak{E}_h$ ,  $\mathfrak{H}_h$  des „äußeren“ Feldes berücksichtigen. Zu diesen Einwirkungen gehören auch diejenigen, die von den anderen, im Kathoden- bez. Becquerelstrahl bewegten Elektronen herrühren; dieselben wären am einfachsten wohl so in Rechnung zu ziehen, daß man das elektrische und magnetische Feld des stationären Konvektions-



stromes, den der Strahl repräsentiert, zu dem von der Batterie bez. dem Magneten erzeugten äußeren Felde hinzufügte. In dem Maße, wie die Feldstärken dieses Feldes jene überwiegen, verschwindet der Fehler, den man durch Vernachlässigung der Wechselwirkung der im Strahle bewegten Elektronen zu behegen pflegt.

Nehmen wir alle äußeren elektromagnetischen Einwirkungen auf das Elektron in die äußere Kraft und Drehkraft mit herein, und vernachlässigen den sonstigen Einfluß materieller Körper, so ist es nicht mehr notwendig, diese Körper durch eine Fläche vom Felde abzutrennen; das vom Elektron erregte Feld kann dann im ganzen Raume durch die Maxwell-Hertzschen Gleichungen bestimmt werden. *Wir lassen daher die Begrenzung des Feldes in das Unendliche rücken und berechnen das Feld des Elektrons, seine Energie und Bewegungsgröße so, als ob das Elektron sich allein im Raume befände. In dieser idealisierten Form soll das Problem der Elektronenbewegung weiterhin behandelt werden.*

Es läßt sich beweisen, daß die über die begrenzende Fläche erstreckten Integrale der Relationen (IV), (V), (Va), (Vb) verschwinden, wenn jene Fläche ins Unendliche rückt. Es sei etwa die Aufgabe gegeben: Es soll die Dynamik eines Elektrons entwickelt werden, welches bis zur Zeit  $t = 0$  sich in Ruhe befand und dann der Einwirkung äußerer Kräfte ausgesetzt wird. Nun pflanzt sich bekanntlich die durch Bewegung des Elektrons erregte Störung des Feldes mit einer endlichen Geschwindigkeit fort, nämlich mit Lichtgeschwindigkeit; nach den unendlich entfernten Punkten der Begrenzungsfläche gelangt sie mithin erst nach unendlicher Zeit. Zu jeder endlichen Zeit ist das Feld dort noch das ursprüngliche elektrostatische; daher verschwindet hier der Poyntingsche Vektor, und somit das Flächenintegral der Relation (IV); der magnetische Teil der von den Maxwellschen Spannungen ausgeübten Kraft  $\mathfrak{P}$  verschwindet ebenfalls, der elektrische Teil nimmt mit der reziproken vierten Potenz der Entfernung ab. Ist die Fläche etwa eine Kugel, deren Mittelpunkt mit der Anfangslage des Mittelpunktes des Elektrons zusammenfällt, so konvergieren die über die Fläche erstreckten Integrale der Relationen (V), (Va), (Vb) mit wachsendem Radius der Kugel

gegen Null, und zwar diejenigen der Relationen (V), (Vb) mindestens wie die reziproke erste Potenz, dasjenige der Relation (Va) mindestens wie die reziproke zweite Potenz dieses Radius. Gehen wir von der genannten ersten Problemstellung aus, so dürfen wir demnach die betreffenden Terme streichen.

Bisweilen ist es zweckmässig, eine andere Fragestellung zu Grunde zu legen: Wie bewegt sich ein Elektron, dessen Geschwindigkeit von Anbeginn an ( $t = -\infty$ ) bis zur Zeit  $t = 0$  nach Grösse und Richtung konstant war, und das dann der Einwirkung äusserer Kräfte ausgesetzt wird. Hier wird man die Kugel wiederum so konstruieren, daß ihr Mittelpunkt mit der Lage des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit  $t = 0$  zusammenfällt. Man wird ihren Radius so groß wählen, daß die nach diesem Zeitpunkte vom Elektron ausgehenden Störungen sie noch nicht erreicht haben; dann herrscht auf der Kugel immer das Feld, welches der ursprünglichen gleichförmigen Bewegung entspricht. Nun wird im § 6 nachgewiesen werden, daß in einem solchen Felde die Feldstärken mit der reziproken zweiten Potenz der Entfernung vom Mittelpunkte des Elektrons abnehmen. Daraus folgt, daß bei Vergrößerung des Radius der Kugel die Flächenintegrale der Relationen (IV), (Va) mindestens mit der reziproken zweiten Potenz, diejenigen der Relationen (V), (Vb) mindestens mit der reziproken ersten Potenz des Radius gegen Null konvergieren. Auch wenn man diese zweite Problemstellung zu Grunde legt, verschwinden beim Grenzübergang die Flächenintegrale. Jene Relationen lassen sich daher einfacher interpretieren.

Wir nennen das über den unendlichen Raum erstreckte Integral

$$(5) \quad W = \iiint \frac{dv}{8\pi} \{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\} \text{ die „Energie des Elektrons“}$$

und unterscheiden ihre Bestandteile

$$(5a) \quad W_e = \iiint \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \text{ als elektrische Energie,}$$

$$(5b) \quad W_m = \iiint \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 \text{ als magnetische Energie.}$$

Die Relation (IV) schreiben wir jetzt

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{dA_i}{dt} = - \iiint d\mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathfrak{F}).$$

Diesen Ausdruck mit Hilfe der kinematischen Grundgleichung (I) und der dynamischen Grundgleichungen (IIIa) und (IIIb) umformend, erhalten wir:

$$(VI) \quad \frac{dW}{dt} = (q \mathfrak{E}) + (\vartheta \Theta) = \iiint d\mathbf{v} \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathfrak{F}_h) = \frac{dA_h}{dt}.$$

*Diese Gleichung formuliert das Energiegesetz: Die zeitliche Zunahme der Energie des Elektrons ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte.*

Werden in den Relationen (V a), (V b) die Flächenintegrale gestrichen, so ersetzen diese Relationen die inneren Kräfte vollständig durch die dynamische Wirkung der elektromagnetischen Bewegungsgröße. An allen Punkten des Feldes, wo die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße zeitlich variiert, greift an dem mit dem Elektron starr verbunden gedachten Gerüst eine entsprechende Reaktionskraft, nämlich

$$- \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \text{ pro Volumeneinheit,}$$

an. Die geometrische Summe aller dieser Kräfte ergibt die resultierende innere Kraft, die Summe ihrer statischen Momente die resultierende innere Drehkraft. Ebenso wird jetzt, der Relation (V) zufolge, die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ersetzt durch die virtuelle Arbeit, welche jene Reaktionskräfte bei einer virtuellen Verrückung des Elektrons und des Gerüsts leisten.

Führt man nunmehr die Relation (V) in die dynamische Grundgleichung (III) ein, so erhält diese die Form

$$(VII) \quad \delta A_h - \iiint d\mathbf{v} \left( \delta s, \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right) = 0.$$

*Diese Formulierung der Bewegungsgesetze entspricht dem d'Alembertschen Prinzip.*

Eine andere Formulierung der Bewegungsgesetze erhalten wir, wenn wir die Relationen (V a), (V b) in die Form (III a), (III b) der dynamischen Grundgleichung einsetzen. Wir nennen

$$(5c) \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint d\mathbf{v} \mathfrak{E} \text{ den „Impuls des Elektrons“,}$$

$$(5d) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint d\mathbf{v} [\mathbf{r} \mathfrak{E}], \text{ seinen „Drehimpuls“,}$$

bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons. Es wird

$$(5e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint d\mathbf{v} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint d\mathbf{v} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] + \frac{1}{c^2} \cdot \iiint d\mathbf{v} \left[ \mathbf{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right]. \end{array} \right.$$

$\partial \mathbf{r} / \partial t$  bedeutet die zeitliche Änderung, welche der vom Mittelpunkte des Elektrons aus nach einem im Raume festen Punkt gezogene Radius Vektor bei der Bewegung des Elektrons erfährt. Da  $q$  die Geschwindigkeit jenes Mittelpunktes anzeigt, so ist

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -q$$

zu setzen. Mithin wird

$$\iiint d\mathbf{v} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \mathfrak{E} \right] = -[q \mathfrak{G}],$$

und daher

$$(5f) \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -[q \mathfrak{G}] + \frac{1}{c^2} \iiint d\mathbf{v} \left[ \mathbf{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right].$$

Durch Kombination von (5e), (5f), (Va), (Vb) und (IIIa), (IIIb) folgen die Gleichungen, welche die zeitliche Änderung des Impulses und des Drehimpulses bestimmen, die sogenannten „Impulssätze“

$$(VIIa) \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{R},$$

$$(VIIb) \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + [q \mathfrak{G}] = \Theta.$$

Diese „Bewegungsgleichungen des Elektrons“ entsprechen ganz den Differentialgleichungen, die man für die Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit aufgestellt hat. Doch sind, bei dem mechanischen Probleme, die Komponenten des Impulses und des Drehimpulses lineare Funktionen der jeweiligen Geschwindigkeit der Translation und Rotation. Bei dem elektrodynamischen Probleme ist das nicht der Fall; die Abhängigkeit dieser Größen von den Komponenten der Geschwindigkeit ist durchaus keine lineare. Ja, strenge genommen,

hängen Impuls und Drehimpuls überhaupt nicht allein von der momentanen Bewegung, sondern von der ganzen Vorgeschichte der Bewegung des Elektrons ab. Denn Impuls und Drehimpuls sind durch Integrale über das den ganzen Raum erfüllende Feld definiert, dieses aber entsteht durch Superposition der Störungen, die das Elektron von Anbeginn an bis zu dem betrachteten Momente ausgesandt hat. Dieser Umstand bedingt die große Komplikation unseres Problems, welche eine gleichzeitig allgemeine und exakte Behandlung der Dynamik des Elektrons als aussichtslos erscheinen läßt. Nur für spezielle Klassen von Bewegungen gelten Funktionsbeziehungen zwischen den Komponenten der jeweiligen Geschwindigkeit und denen des Impulses, und nur bei sehr geringer Geschwindigkeit der Translation nehmen dieselben eine lineare Form an.

§ 5. Umformung der Feldgleichungen und der Bewegungsgleichungen durch Einführung eines mit dem Elektron starr verbundenen Koordinatensystems.

Bereits im dritten Abschnitte haben wir ein mit dem Elektron starr verbundenes Gerüst konstruiert. Wir wollen jetzt die zeitlichen Änderungen berechnen, welche die Feldstärken  $\mathcal{E}$  &  $\mathcal{H}$ , sowie das Vektorpotential  $\mathcal{A}$  in einem Punkte dieses mit dem Elektron bewegten Gerüsts erfahren; wir beziehen dabei diese Vektoren auf ein in dem Gerüst festes Achsenkreuz, das die Drehbewegung des Elektrons mitmacht. Es sind also die zeitlichen Änderungen der drei Vektoren, beurteilt von dem Gerüst aus, die wir suchen; wir schreiben sie

$$\frac{\partial' \mathcal{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial' \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial' \mathcal{A}}{\partial t}.$$

Durch Einführung derselben in die Feldgleichungen werden diese auf das mit dem Elektron starr verbundene Achsenkreuz bezogen.

$\partial' \mathcal{A} / \partial t$  setzt sich aus drei Bestandteilen zusammen; erstens ist die an dem betreffenden Punkte des Raumes gerade stattfindende zeitliche Änderung  $\partial \mathcal{A} / \partial t$  in Rechnung zu setzen. Hierzu kommt die Änderung, die daher rührt, daß der betreffende Punkt des Gerüsts sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch den Raum bewegt; sie beträgt  $(\mathbf{v} \nabla) \mathcal{A}$ . Endlich ist diejenige Änderung in Betracht zu ziehen, welche infolge der

Rotationsbewegung des Koordinatensystems hereinkommt; aus der Mechanik starrer Körper ist bekannt<sup>1)</sup>, daß diese Änderung durch  $[\mathfrak{M} \mathcal{P}]$  auszudrücken ist. Die resultierende Änderung ist daher

$$(6) \quad \frac{\partial' \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \mathcal{P}) \mathfrak{M} + [\mathfrak{M} \mathcal{P}],$$

in entsprechender Weise ergibt sich

$$(6a) \quad \frac{\partial' \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \mathcal{P}) \mathfrak{E} + [\mathfrak{E} \mathcal{P}],$$

$$(6b) \quad \frac{\partial' \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \mathcal{P}) \mathfrak{F} + [\mathfrak{F} \mathcal{P}].$$

Die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{M}$ , der Impuls und der Drehimpuls des Elektrons, wurden stets auf den Mittelpunkt des Elektrons bezogen; sie sind durch Integrale über den ganzen Raum definiert. Bei ihnen fällt die zweite Ursache der zeitlichen Änderung fort; es sind daher, wie für den starren Körper, so auch für das Elektron die auf das mitbewegte Koordinatensystem bezogenen zeitlichen Änderungen des Impulses und des Drehimpulses

$$(6c) \quad \frac{d' \mathfrak{E}}{dt} = \frac{d \mathfrak{E}}{dt} + [\mathfrak{E} \mathcal{P}],$$

$$(6d) \quad \frac{d' \mathfrak{M}}{dt} = \frac{d \mathfrak{M}}{dt} + [\mathfrak{M} \mathcal{P}].$$

Wie wir durch Konstruktion des mit dem Elektron starr verbundenen Gerüsts die Definitionsgleichung (I) des Geschwindigkeitsvektors  $\mathfrak{v}$  erweiterten, so können wir jetzt auch die Gleichung (1a), welche den für die inneren Kräfte maßgebenden Vektor  $\mathfrak{F}$  definierte, und die sich zunächst nur auf die Punkte des Elektrons bezog,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{E}],$$

in allgemeinerem Sinne deuten. *Außerhalb des Elektrons gibt der Vektor  $\mathfrak{F}$  die Kraft an, welche auf einen am Gerüst befestigten elektrischen Einheitspol wirken würde. Sein magnetisches Gegenstück, der Vektor*

$$(7) \quad \mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{E}],$$

1) Vgl. z. B. E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. 1. p. 225. Leipzig 1898.

stellt die Kraft dar, welche das Feld auf einen mit dem Gerüst bewegten magnetischen Einheitspol ausüben würde.

Wir stellen der Gleichung (6) eine andere gegenüber, die sich ergibt, wenn man den Vektor  $\mathfrak{F}$  vermöge der Feldgleichungen (II g), (II h) durch die Potentiale  $\Phi$ ,  $\mathfrak{A}$  ausdrückt

$$\mathfrak{F} = \text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \text{ curl } \mathfrak{A}].$$

Nach der Rechnungsregel  $\mathcal{D}$  ist

$$-\text{grad} (\mathbf{v} \mathfrak{A}) = [\mathbf{v} \text{ curl } \mathfrak{A}] + [\mathfrak{A} \text{ curl } \mathbf{v}] + (\mathbf{v} \nabla) \mathfrak{A} + (\mathfrak{A} \nabla) \mathbf{v};$$

da ferner, mit Rücksicht auf die kinematische Grundgleichung

$$\text{curl } \mathbf{v} = 2 \mathcal{D} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A} \nabla) \mathbf{v} = -[\mathfrak{A} \mathcal{D}]$$

zu setzen ist, so folgt:

$$[\mathbf{v} \text{ curl } \mathfrak{A}] = -\text{grad} (\mathbf{v} \mathfrak{A}) - (\mathbf{v} \nabla) \mathfrak{A} - [\mathfrak{A} \mathcal{D}].$$

Es wird daher

$$\mathfrak{F} = \text{grad} \left\{ \Phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \mathfrak{A}) \right\} - \frac{1}{c} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathfrak{A} + [\mathfrak{A} \mathcal{D}] \right\}.$$

Berücksichtigen wir jetzt die Relation (6), und setzen zur Abkürzung

$$(7a) \quad \varphi = \Phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \mathfrak{A}),$$

so folgt

$$(7b) \quad \mathfrak{F} = \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$$

als Ausdruck des Vektors  $\mathfrak{F}$ .

Es ist selbstverständlich für die Berechnung des Gradienten, des Curl und der Divergenz gleichgültig, ob man mit einem im Raume festen, oder ob man mit einem bewegten Achsen-system operiert. Denn hier käme ja nur die jeweilige relative Lage der Achsenkreuze, nicht deren Bewegung in Betracht; jene Operationen ergeben nun Vektoren und Skalare, Größen also, die von der Orientierung des Koordinatensystems unabhängig sind; diese sind invariant gegenüber Koordinatentransformationen. Da wir vektorielle Schreibweise benutzen, so können wir uns die Umrechnung der nur von der räumlichen Verteilung des Feldes abhängigen Skalaren und Vektoren ersparen. So können wir z. B. die Feldgleichung (II h)  $\mathfrak{F} = \text{curl } \mathfrak{A}$  unmittelbar auf

das neue Achsensystem beziehen; mithin folgt aus (7 b) die Relation

$$(7c) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial' \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H};$$

dieselbe stellt eine *Umformung der zweiten Feldgleichung (II b) auf unser im Elektron festes Axenkreuz* dar; sie ergibt sich auch aus Gleichung (6 b) in entsprechender Weise, wie jetzt mit Hülfe von (6 a) die erste Feldgleichung (II a) umgerechnet werden soll.

Wir berechnen den Curl des durch (7) definierten Vektors  $\mathfrak{H}'$ , wobei wir die Rechnungsregel  $\eta$  anwenden

$$\text{curl } \mathfrak{H}' = \text{curl } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \{ (\mathfrak{E} \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathfrak{E} + \mathbf{v} \text{ div } \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \text{ div } \mathbf{v} \}.$$

Da nun  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ,  $(\mathfrak{E} \nabla) \mathbf{v} = -[\mathfrak{E} \mathfrak{D}]$  zu setzen ist, so folgt, mit Rücksicht auf die Feldgleichungen (II a), (II c)

$$\text{curl } \mathfrak{H}' = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathfrak{E} + [\mathfrak{E} \mathfrak{D}] \right\}.$$

Demnach ergibt (6 a)

$$(7d) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial' \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H}',$$

eine Gleichung, die als *auf das Gerüst bezogene erste Feldgleichung* zu bezeichnen ist. Die dritte und die vierte Feldgleichung (II c), (II d) gelten, nach der obigen Bemerkung, in unveränderter Form.

Die neue Form der Feldgleichungen legt es nahe, eine Klasse „*ausgezeichneter Bewegungen*“ näher zu betrachten. Die *ausgezeichneten Bewegungen* sind dadurch charakterisiert, daß die Felder des Skalars  $\Phi$  sowie des Vektors  $\mathfrak{A}$ , beurteilt von dem mit dem Elektron festen Gerüst aus, stationär sind. Für diese Bewegungen verschwindet  $\partial' \mathfrak{A} / \partial t$ , mithin auch  $\partial' \mathfrak{H} / \partial t$ ; aus (7 c) folgt daher: *Das Feld des Vektors  $\mathfrak{H}$  ist, bei den ausgezeichneten Bewegungen, ein wirbelfreies. Nach (7 b) ist  $\varphi$  der Skalar, dessen Gradient der Vektor  $\mathfrak{H}$  ist; derselbe ist durch (7 a) bestimmt, und wird in dem betrachteten Falle „Konvektionspotential“ genannt. Nur diejenigen Felder, die ausgezeichneten Bewegungen des Elektrons entsprechen, besitzen ein Konvektionspotential.*

Wir rechnen nun auch die Bewegungsgleichungen (VII a), (VII b) auf das mit dem Elektron rotierende Achsenkreuz um,



indem wir die Relationen (6 c), (6 d) in dieselben einführen.  
Die umgeformten Bewegungsgleichungen sind:

$$(8) \quad \frac{d' \mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{R} + [\mathfrak{G} \mathfrak{P}],$$

$$(8a) \quad \frac{d' \mathfrak{M}}{dt} = \Theta + [\mathfrak{M} \mathfrak{P}] - [q \mathfrak{G}].$$

Da nach den Rechnungsregeln ( $\gamma$ ,  $\alpha$ ) die Identität besteht:

$$(q, [\mathfrak{G} \mathfrak{P}]) = ([q \mathfrak{G}], \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, [q \mathfrak{G}]),$$

so gilt die Relation

$$\left( q \frac{d' \mathfrak{G}}{dt} \right) + \left( \mathfrak{P} \frac{d' \mathfrak{M}}{dt} \right) = (q \mathfrak{R}) + (\mathfrak{P} \Theta).$$

Die Einführung in die Energiegleichung (VI) ergibt

$$(8b) \quad \frac{dW}{dt} = \left( q \frac{d' \mathfrak{G}}{dt} \right) + \left( \mathfrak{P} \frac{d' \mathfrak{M}}{dt} \right).$$

Diese aus dem Energiesatz und den Impulssätzen deduzierte Relation ist für das folgende wichtig; denn sie stellt eine allgemeine, von der speziellen Art der äußeren Kräfte unabhängige Eigenschaft des vom bewegten Elektron erregten Feldes dar. Wir erhalten eine andere Form dieser Relation, wenn wir beachten, daß es für Skalare wie  $W$ ,  $(q \mathfrak{G})$  und  $(\mathfrak{P} \mathfrak{M})$  gleichgültig ist, ob wir bei der Berechnung ihrer zeitlichen Änderung ein festes oder ein rotierendes System zu Grunde legen, daß mithin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (q \mathfrak{G}) &= \left( q \frac{d' \mathfrak{G}}{dt} \right) + \left( \mathfrak{G} \frac{d' q}{dt} \right), \\ \frac{d}{dt} (\mathfrak{P} \mathfrak{M}) &= \left( \mathfrak{P} \frac{d' \mathfrak{M}}{dt} \right) + \left( \mathfrak{M} \frac{d' \mathfrak{P}}{dt} \right) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Dann wird

$$(8c) \quad \frac{d}{dt} \{ (q \mathfrak{G}) + (\mathfrak{P} \mathfrak{M}) - W \} = \left( \mathfrak{G} \frac{d' q}{dt} \right) + \left( \mathfrak{M} \frac{d' \mathfrak{P}}{dt} \right).$$

Das ist die Energie und Impuls verknüpfende Relation, die uns im § 10 zu den Lagrangeschen Gleichungen führen wird. Wir geben noch einige dort zu verwendende Beziehungen an.

Aus der Definition der Vektoren  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{S}$  folgen die Identitäten

$$\begin{aligned} \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{F}) &= W_e + \frac{1}{c} \cdot \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E}, [\mathfrak{v} \mathfrak{S}]), \\ \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{S} \mathfrak{S}) &= W_m - \frac{1}{c} \cdot \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{S}, [\mathfrak{v} \mathfrak{E}]). \end{aligned}$$

Nun ist nach den Rechnungsregeln ( $\alpha, \beta, \gamma$ ):

$$-(\mathfrak{E}, [\mathfrak{v} \mathfrak{H}]) = (\mathfrak{H}, (\mathfrak{v} \mathfrak{E})) = (\mathfrak{v}, [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]) = \frac{4\pi}{c} \cdot (\mathfrak{v} \mathfrak{E}),$$

folglich nach (I), (5 c), (5 d):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \cdot \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E}, [\mathfrak{v} \mathfrak{H}]) &= +\frac{1}{c} \cdot \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{H}, [\mathfrak{v} \mathfrak{E}]) \\ &= \frac{1}{2c^2} \cdot \iiint d\mathfrak{v} (\mathfrak{v} \mathfrak{E}) = \frac{1}{2} (\mathfrak{q} \mathfrak{U}) + \frac{1}{2} (\mathcal{P} \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Wir erhalten mithin

$$(9) \quad \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{H}) = W_e - \frac{1}{2} (\mathfrak{q} \mathfrak{U}) - \frac{1}{2} (\mathcal{P} \mathfrak{M}),$$

$$(9a) \quad \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{H} \mathfrak{H}) = W_m - \frac{1}{2} (\mathfrak{q} \mathfrak{U}) - \frac{1}{2} (\mathcal{P} \mathfrak{M}).$$

Durch Addition bez. Subtraktion folgt

$$(9b) \quad (\mathfrak{q} \mathfrak{U}) + (\mathcal{P} \mathfrak{M}) - W = -\iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{H}) - \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{H} \mathfrak{H}),$$

$$(9c) \quad W_m - W_e = -\iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{H}) + \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{H} \mathfrak{H}).$$

Ein anderer Ausdruck für die Differenz der magnetischen und der elektrischen Energie folgt aus den Feldgleichungen (II); nach (IIh) ist

$$W_m = \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A}),$$

die Rechnungsregel  $\zeta$  ergibt

$$W_m = \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) + \iint \frac{d\sigma}{8\pi} [\mathfrak{A} \mathfrak{H}]_v,$$

wenn wir zunächst das Feld wieder durch eine Fläche 0 begrenzen. Die Feldgleichung (IIa) ergibt

$$W_m = \iiint \frac{d\mathfrak{v} \mathfrak{q}}{2c} (\mathfrak{v} \mathfrak{A}) + \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi c} \left( \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right) + \iint \frac{d\sigma}{8\pi} [\mathfrak{A} \mathfrak{H}]_v.$$

Andererseits ist, nach (IIg)

$$W_e = \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} \left( \mathfrak{E}, \operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right),$$

oder nach Regel  $\epsilon$

$$W_e = \iiint \frac{d\mathfrak{v} \mathfrak{q} \Phi}{2} - \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi c} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \mathfrak{E} \right) - \iint \frac{d\sigma}{8\pi} \cdot \Phi \mathfrak{E}_v.$$

Läßt man nun die Fläche 0 in das Unendliche rücken, so konvergieren die Flächenintegrale gegen Null, sowohl bei der

ersten, wie bei der zweiten der im § 4 erwähnten Problemstellungen. Bei der ersten Voraussetzung über den Anfangszustand sind  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{S}$  an der Kugelfläche überhaupt Null,  $\Phi$ ,  $\mathfrak{E}$ , ist, wie in der Elektrostatik, der reziproken dritten Potenz des Kugelradius proportional, mithin verschwindet das entsprechende Flächenintegral mit der  $-1^{\text{ten}}$  Potenz des Kugelradius. Das Gleiche gilt bei allen stationären, insbesondere bei den im § 10 betrachteten ausgezeichneten Bewegungen,  $\Phi$ ,  $\mathfrak{A}$  nehmen hier stets mit der  $-1^{\text{ten}}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{S}$  mit der  $-2^{\text{ten}}$  Potenz des Abstandes vom Mittelpunkt des Elektrons ab; die Flächenintegrale verschwinden daher beim Grenzübergang mit der  $-1^{\text{ten}}$  Potenz des Kugelradius. Es folgt jetzt, gemäß (7a):

$$(9d) \quad W_m - W_e = - \iiint \frac{d\mathfrak{v} \varrho \varphi}{2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{A}),$$

eine Relation, die natürlich nur dann einen Sinn hat, wenn das über dem unendlichen Raum erstreckte Integral

$$\iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{A})$$

einen endlichen Wert besitzt; für die Felder der ausgezeichneten Bewegungen ist das, wie in § 10 bewiesen wird, der Fall.

#### § 6. Gleichförmige Translation.

Wir gehen jetzt zur Behandlung spezieller Bewegungen über, wobei wir folgendermaßen verfahren. Wir nehmen eine Bewegung an, welche der kinematischen Grundgleichung (I) Genüge leistet; alsdann bestimmen wir aus den Feldgleichungen (II) das elektromagnetische Feld. Endlich überzeugen wir uns davon, daß die dynamischen Grundgleichungen (III) erfüllt sind, und zwar gehen wir dabei aus von derjenigen Umformung der dynamischen Grundgleichungen, welche wir die „Bewegungsgleichungen“ nannten (Gleichung VIIa), (VIIb). Diese Umformung setzte allerdings das Verschwinden gewisser, über die ins Unendliche gerückte Begrenzung erstreckter Integrale voraus; wir müssen uns jetzt nachträglich davon überzeugen, daß die Feldstärken sich im Unendlichen in der Weise verhalten, wie es für das Verschwinden jener Integrale erforderlich war.

Das in diesem Abschnitte zu behandelnde Problem macht über den Anfangszustand die zweite der im § 4 erwähnten

Annahmen. Das Elektron soll sich seit unendlich langer Zeit translatorisch mit einer nach Richtung und Betrag konstanten Geschwindigkeit bewegen. Eine solche Bewegung, für die  $\vartheta = 0$ ,  $v = q$  zu setzen ist, ist mit der kinematischen Grundgleichung (I) ohne weiteres verträglich. Wir legen die  $x$ -Achse der Bewegungsrichtung parallel, sodaß  $q_y = q_z = 0$  wird, und setzen für den Betrag der Geschwindigkeit  $q_x = q$ , für dessen Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit  $q/c = \beta$ .

Um das Feld zu ermitteln, gehen wir aus von der Form (IIe bis h) der Feldgleichungen. Wie erwähnt, ist das Feld des skalaren Potentials  $\Phi$ , wie auch dasjenige des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  als entstanden anzusehen durch Superposition der Beiträge, welche von den Volumenelementen des Elektrons, ihrer Geschwindigkeit entsprechend, ausgesandt worden sind. Das Feld hängt somit ab von der Geschwindigkeit, mit der das Elektron von Anbeginn an bis zu dem betreffenden Zeitpunkt sich bewegt hat. Bei der gleichförmigen Bewegung nun, um die es sich jetzt handelt, ist in jedem Moment die Vorgeschichte der Bewegung dieselbe. Mithin ist das Feld des Skalars  $\Phi$  und des Vektors  $\mathfrak{A}$ , bezogen auf ein translatorisch mitbewegtes Achsenkreuz, konstant. *Gleichförmige Translation gehört daher zu den ausgezeichneten Bewegungen.*

Die Feldgleichungen (II) bezogen sich auf ein im Äther festes Koordinatensystem; legen wir jetzt ein mitbewegtes System zu Grunde, so ist mit Rücksicht auf den stationären Charakter des Feldes

$$\frac{\partial}{\partial t} = -q \frac{\partial}{\partial x}$$

zu setzen; die Gleichungen (IIe), (II f) werden dann

$$(10) \quad \begin{cases} (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = -4\pi\rho\beta. \end{cases}$$

Mithin folgt

$$(10a) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_x = \beta \Phi, \\ \text{hingegen wird} \\ \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0. \end{cases}$$

Aus dem so bestimmten skalaren und Vektorpotential leiten die Gleichungen (II g), (II h) das elektromagnetische Feld ab:

$$(10b) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = -(1-\beta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

$$(10c) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = 0, \\ \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\beta \mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = -\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} = +\beta \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + 1/c [q \mathfrak{H}]$  sind:

$$(10d) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x & = -(1-\beta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{E}_y - \beta \mathfrak{H}_z = (1-\beta^2) \mathfrak{E}_y = -(1-\beta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \mathfrak{F}_z = \mathfrak{E}_z + \beta \mathfrak{H}_y = (1-\beta^2) \mathfrak{E}_z = -(1-\beta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können wir zu einer Vektorgleichung zusammenfassen

$$(10e) \quad \mathfrak{F} = \text{grad } \varphi, \quad \varphi = (1-\beta^2) \Phi.$$

Da die betrachtete Bewegung zu den ausgezeichneten gehört, so hätte die Existenz eines *Konvektionspotentials*, dessen Gradient der Vektor  $\mathfrak{F}$  ist, auch direkt aus den Ergebnissen des § 5 gefolgert werden können; der erhaltene Wert desselben folgt in der Tat aus (7a), (10a). Was endlich den Vector

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} - \frac{1}{c} [q \mathfrak{E}]$$

anbelangt, so folgt aus (10c):

$$(10f) \quad \mathfrak{F}'_x = \mathfrak{F}'_y = \mathfrak{F}'_z = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf ergeben die Gleichungen (9c), (10d):

$$(10g) \quad \begin{cases} W_m - W_e = -\iiint \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{F}) \\ = -\iiint \frac{dv}{8\pi} \{\mathfrak{E}_x^2 + (1-\beta^2)(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)\}. \end{cases}$$

Der letzte Wert hätte auch direkt aus der Definition der elektrischen und magnetischen Energie, und der Gleichung (10c)

gewonnen werden können. Die Gleichung (9b) ergibt, mit Rücksicht auf (10f):

$$(10h) \quad q \mathfrak{G}_x - W = - \iiint \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{F}).$$

Es ist zu betonen, daß die Gleichungen (10) bis (10h) für eine beliebige Verteilung der elektrischen Ladung gelten; die über die Symmetrie des Elektrons gemachte Annahme wurde bisher nicht herangezogen.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten des Skalars  $\Phi$  im Unendlichen. Wir bilden das Elektron und sein Feld ab auf ein ruhendes System, das vermöge der Transformation

$$(11) \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

in Richtung der  $x$ -Achse gestreckt ist; die Transformation führt zu einem reellen Systeme, wenn  $\beta < 1$  ist, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Elektrons die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht. Nehmen wir das an, so wird der Skalar  $\Phi$  in dem deformierten Systeme durch die Poissonsche Gleichung bestimmt

$$(11a) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi \varrho.$$

Es ist demnach  $\Phi$  zu deuten als Potential eines Rotationsellipsoids, das über sein Volumen, oder über eine Oberflächenschicht homogen geladen ist. In der Potentialtheorie lernt man, daß ein solches Potential im Unendlichen von der ersten Ordnung des reziproken Abstandes vom geladenen Körper verschwindet. Das Gleiche gilt, den Gleichungen (10a), (10e) zufolge, für  $\mathfrak{A}_x$  und  $\varphi$ ; aus (10b), (10c), (10d) folgt, daß die Komponenten von  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{F}$  im Unendlichen von der zweiten Ordnung verschwinden. Auch wenn man, mit Hilfe der Transformation (11), zum bewegten Elektron zurückkehrt, ändert sich dieser Sachverhalt nicht. Damit sind auch bei der zweiten im § 4 gemachten Annahme über den Anfangszustand die Voraussetzungen als richtig dargetan, auf denen der dort gegebene Beweis für das Verschwinden der Oberflächenintegrale der Relationen (IV), (V), (Va), (Vb) beruhte. Jeder mit derartigen Rechnungen Vertraute, der das Bedürfnis fühlt, den angedeuteten Beweis genauer auszuführen, und ihn auf beliebige Verteilung der Ladung auszudehnen, wird dabei keine prinzipielle Schwierig-

keit finden. Hier würde ein genaueres Eingehen auf die betreffenden Rechnungen die Aufmerksamkeit allzusehr von anderen, für das vorliegende Problem wesentlicheren Gesichtspunkten ablenken. Von Wichtigkeit ist das Resultat: *Die Bewegungsgleichungen (VIIa), (VIIb) sowie das d'Alembertsche Prinzip (VII) und der Energiesatz (VI) dürfen angewandt werden, wenn der Anfangszustand (von  $t = -\infty$  bis  $t = 0$ ) gleichförmiger Translationsbewegung entspricht, vorausgesetzt, daß deren Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht.*

Die letztere Voraussetzung wollen wir als erfüllt annehmen. Dann ist also weiter auf Grund der Bewegungsgleichungen zu untersuchen, ob zur Aufrechterhaltung gleichförmiger Translationsbewegung die Einwirkung einer äußeren Kraft bez. Drehkraft notwendig ist, oder nicht. Da das Elektron sein Feld, und mithin auch seinen Impuls und Drehimpuls translatorisch mitführt, so ist

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = 0;$$

eine äußere Kraft  $\mathfrak{R}$  ist daher nicht erforderlich, wohl aber eine äußere Drehkraft  $\Theta = [q\mathfrak{G}]$ , es sei denn daß der Impulsvektor der Bewegungsrichtung parallel orientiert ist. Daß eine äußere Drehkraft angreifen muß, wenn der Impuls schief zur Bewegungsrichtung orientiert ist, folgt in der Tat aus den allgemeinen Impulssätzen. In diesem Falle ändert sich nämlich beständig das statische Moment des Impulses, bezogen auf einen im Raume festen Punkt, da der Impuls ja am Mittelpunkt des Elektrons angreifend zu denken ist. Diese Änderung des statischen Momentes der Bewegungsgröße erfordert eben die dauernde Einwirkung einer äußeren Drehkraft. *Kräftefrei kann eine gleichförmige Translationsbewegung dann und nur dann vor sich gehen, wenn der Impulsvektor in Richtung der Bewegung weist.*

Ob diese Bedingung der kräftefreien Bewegung erfüllt ist, das hängt von Form und Verteilung der konvektiv bewegten Ladung ab. Hier kommt nun die Symmetrie zur Geltung, die wir dem Elektron zuschrieben. Wir wollen zunächst die Annahmen über die Form und Ladungsverteilung etwas allgemeiner halten; wir setzen voraus, daß beide symmetrisch sind in Bezug auf zwei aufeinander senkrechte, durch die

Bewegungsrichtung gelegte Ebenen. Wir zeigen, daß bei dieser Annahme die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{G}_z$  des Impulses verschwinden.

Wir wählen die beiden Symmetrieebenen als  $(xy)$ ,  $(xz)$ -Ebene; dann ist sofort ersichtlich, daß die Differentialgleichung (10) Form und Sinn bewahrt, wenn man  $y$  mit  $-y$ ,  $z$  mit  $-z$  vertauscht. Mithin ist

$$\Phi(-y) = \Phi(y), \quad \Phi(-z) = \Phi(z).$$

Mit Rücksicht auf (10b), (10c) folgt hieraus:

Zur  $(xy)$ -Ebene symmetrisch sind  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ .

Zur  $(xy)$ -Ebene antisymmetrisch sind  $\mathfrak{E}_z$ ,  $\mathfrak{H}_y$ .

Zur  $(xz)$ -Ebene symmetrisch sind  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_z$ ,  $\mathfrak{H}_y$ .

Zur  $(xz)$ -Ebene antisymmetrisch sind  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ .

Da  $\mathfrak{H}_z = 0$ , so folgt:  $\mathfrak{G}_y$  ist antisymmetrisch zur  $(xz)$ -Ebene,  $\mathfrak{E}_z$  ist antisymmetrisch zur  $(xy)$ -Ebene. Es zerstören sich also die Beiträge, die zwei spiegelbildlich zur  $(xz)$ -Ebene liegende Volumenelemente zur Komponente  $\mathfrak{G}_y$  des resultierenden Impulses liefern, und ebenso diejenigen, die zwei spiegelbildlich zur  $(xy)$ -Ebene liegende Volumenelemente zur Komponente  $\mathfrak{E}_z$  liefern. Man beweist übrigens durch weitere Verfolgung der Symmetriebetrachtungen leicht, daß alle drei Komponenten des Drehimpulses verschwinden. Uns interessiert hier nur das Ergebnis: *Ist die Verteilung der bewegten Ladung symmetrisch zu zwei aufeinander senkrechten, durch die Bewegungsrichtung gelegten Ebenen, so ist der Impulsvektor der Bewegungsrichtung parallel orientiert.*

Die Bedingung der stationären kräftefreien Bewegung wäre also z. B. erfüllt für ein homogen geladenes Ellipsoid, das parallel einer der drei Hauptachsen fortschreitet; wir werden indessen im § 12 zeigen, daß von diesen drei möglichen Bewegungen nur diejenige parallel der größten Achse stabil ist. Für unser kugelförmiges Elektron mit homogener Volumen- oder Flächenladung aber ist die obige Symmetriebedingung für Bewegung in einer beliebigen Richtung erfüllt. *Für das Elektron gilt demnach das erste Axiom Newtons in folgender Fassung: War die Bewegung des Elektrons von Anbeginn an eine gleichförmige, rein translatorische, und war die Geschwindigkeit kleiner*



als die Lichtgeschwindigkeit, so ist, um die Bewegung gleichförmig zu erhalten, keine äußere Kraft oder Drehkraft erforderlich.

### § 7. Ableitung des Impulses und der Energie aus der Lagrangeschen Funktion.

Wir nennen mit Rücksicht auf die später sich ergebenden Analogien zur analytischen Mechanik die Differenz der magnetischen und der elektrischen Energie des Elektrons seine „Lagrangesche Funktion“:

$$(12) \quad L = W_m - W_e.$$

Die aus (10g) folgende Gleichung

$$L = - \iiint \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{H})$$

wird mit Hülfe von (IIc), (10e) und der Regel 2 auf die Form gebracht

$$L = - \iiint \frac{dv \varphi \varphi}{2} + \iint \frac{d\varphi \mathfrak{E}_v}{8\pi}.$$

Rückt die Begrenzung des Feldes ins Unendliche, so verschwindet  $\varphi$  von der ersten Ordnung,  $\mathfrak{E}_v$  von der zweiten Ordnung, wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde; mithin verschwindet beim Grenzübergange das Flächenintegral. Es gilt also die von Searle<sup>1)</sup> herrührende Relation:

$$(12a) \quad L = - \iiint \frac{dv \varphi \varphi}{2}.$$

Dieselbe drückt die Lagrangesche Funktion aus durch ein über das Volumen des Elektrons erstrecktes, vom Konvektionspotential abhängiges Integral.

Bei der hier betrachteten gleichförmigen Translation hängt die Lagrangesche Funktion, bei gegebener Elektrizitätsverteilung, nur von der Geschwindigkeit  $q$  ab. Wir differenzieren nach dieser, wobei wir von (10g) ausgehen:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dq} &= - \iiint \frac{dv}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \{ \mathfrak{E}_x^2 + (1 - \beta^2) (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) \} \\ &= \frac{\beta}{c} \cdot \iiint \frac{dv}{4\pi} \{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \} \\ &\quad - \iiint \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial q} + (1 - \beta^2) \left( \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial q} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial q} \right) \right\}. \end{aligned}$$

1) G. F. C. Searle, Phil. Trans. 187 A. p. 675—713. 1896. In meiner früheren Mitteilung (Gött. Nachr. p. 29. 1902) habe ich  $U = W_e - W_m$  „Kräftefunktion des Elektrons“ genannt und die Analogie zur elektrostatischen Energie in den Vordergrund gestellt.

Wir schreiben unter dem Integralzeichen partielle Differentialquotienten nach  $q$ , um anzudeuten, daß die Differentiation sich auf einen bestimmten Punkt des bewegten Systems bezieht; da die Ladungsverteilung von der Geschwindigkeit unabhängig angenommen wird, so ist  $\partial \varrho / \partial q = 0$  zu setzen. Nun ergibt aber (10d) für das zweite der obigen Integrale den Ausdruck:

$$\iiint \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{F}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial q} + \mathfrak{F}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial q} + \mathfrak{F}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial q} \right\}.$$

Mit Rücksicht auf (10c) und das Verhalten von  $\varphi$  und  $\mathfrak{E}$  im Unendlichen erhält man als Wert dieses Integrals

$$\iiint \frac{dv}{4\pi} \cdot \varphi \frac{\partial}{\partial q} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \iiint dv \cdot \varphi \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0.$$

Das erste Integral mit Hülfe von (10e) umformend, gelangen wir zu der Relation:

$$\frac{dL}{dq} = \frac{1}{c} \cdot \iiint \frac{dv}{4\pi} \{ \mathfrak{E}_y \mathfrak{F}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{F}_y \} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint dv \mathfrak{G}_x,$$

oder

$$(12c) \quad \mathfrak{G}_x = \frac{dL}{dq}.$$

Die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente des Impulses wird erhalten, indem man die Lagrangesche Funktion nach der Geschwindigkeit differenziert; die Relation (12c) entspricht derjenigen, die man in der analytischen Mechanik „erste Zeile der Lagrangeschen Gleichungen“ nennt.

Aus (12), (12c), (10g) (10h) folgt jetzt auch der aus der analytischen Mechanik bekannte Ausdruck der Energie durch die Lagrangesche Funktion:

$$(12d) \quad W = -L + q \frac{dL}{dq}.$$

Die Relationen (12) bis (12d) gelten für beliebige Ladungsverteilung; die über die Symmetrie des Elektrons gemachten Annahmen wurden bei ihrer Ableitung nicht verwandt. Die Symmetrie des Elektrons bedingt, wie im § 6 gezeigt wurde, daß der Betrag des Impulses  $G = \mathfrak{G}_x$  wird. Die Gleichungen (12c), (12d) gestatten es daher, die Berechnung des Impulses und der Energie des Elektrons zurückzuführen auf die Bestimmung der Lagrangeschen Funktion.

Um mit Hülfe von (12a) die Lagrangesche Funktion des Elektrons zu ermitteln, bestimmen wir zunächst das Kon-

vektionspotential. Den Gleichungen (10), (10c) des vorigen Paragraphen zufolge hat dasselbe der Differentialgleichung zu genügen:

$$(13) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \varrho (1 - \beta^2).$$

Bei der Lösung derselben bedienen wir uns eines von H. A. Lorentz <sup>1)</sup>, sowie auch von Searle <sup>2)</sup> angewandten Abbildungsverfahrens. Wir bilden das bewegte System  $S$ , nämlich das kugelförmige Elektron und das Feld seines Konvektionspotentials, auf ein ruhendes System  $S'$  ab durch die Transformation

$$(13a) \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Das System  $S'$  entsteht also, indem  $S$  parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$  gestreckt wird. Die Ladung entsprechender Volumenelemente soll dabei die gleiche, also

$$(13b) \quad \varrho' = \varrho \sqrt{1 - \beta^2}$$

sein. Alsdann ergibt (13):

$$(13c) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -4\pi \varrho' \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Das elektrostatische Potential  $\varphi'$  im ruhenden Systeme  $S'$  hingegen erfüllt die Poissonsche Gleichung

$$(13d) \quad \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = -4\pi \varrho'.$$

Mithin folgt:

$$(13e) \quad \varphi = \varphi' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Diese Gleichung führt die Bestimmung des Konvektionspotentials im bewegten Systeme  $S$  zurück auf die Bestimmung des elektrostatischen Potentials in dem gemäß (13a), (13b) deformierten Systeme  $S'$ . Es folgt

$$\iiint \frac{d v \varrho \varphi}{2} = \iiint \frac{d v' \varrho' \cdot \varphi'}{2} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Schreiben wir

$$W'_e = \iiint \frac{d v' \varrho' \varphi'}{2}$$

für die elektrostatische Energie des Systemes  $S'$ , so wird der Ausdruck (12a) für die Lagrangsche Funktion

$$(14) \quad L = -\sqrt{1 - \beta^2} \cdot W'_e.$$

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 36. ff.

2) G. F. C. Searle, Phil. Mag. 44. p. 329. ff. (1897).

Die Bestimmung der Lagrangeschen Funktion ist so zurückgeführt auf die Berechnung der elektrostatischen Energie eines ruhenden Systems; dasselbe entsteht aus dem bewegten dadurch, daß eine Streckung (13a) parallel der Bewegungsrichtung ausgeführt wird, wobei die Ladung der Volumenelemente, mithin auch die Gesamtladung, konstant bleibt.

Dieses Resultat gilt für beliebige Ladungsverteilung; wir wenden es jetzt auf unser kugelförmiges Elektron vom Radius  $a$  an. Im Falle gleichförmiger Volumenladung des Elektrons ist sein Bild in  $S$  ein gleichförmig über sein Volumen geladenes Rotationsellipsoid von den Halbachsen

$$(14a) \quad \frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}} = a', \quad a, \quad a.$$

Liegt der Fall der Flächenladung vor, so ist in  $S$  die Ladung  $e$  gleichförmig verteilt über eine äußerst dünne, von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzte Schicht. Das Potential  $\varphi'$  der letzteren Verteilung ist bekanntlich in dem Hohlraume konstant, die Verteilung entspricht mithin der Gleichgewichtsverteilung auf der Oberfläche eines leitenden Ellipsoids. Nennen wir  $Q'$  die Kapazität eines Ellipsoids von den Halbachsen (14a), so gilt die Formel <sup>1)</sup>

$$(14b) \quad \frac{1}{Q'} = \frac{\ln\left(\frac{a' + \sqrt{a'^2 - a^2}}{a}\right)}{\sqrt{a'^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta a} \cdot \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Die elektrostatische Energie des Systems  $S$  beträgt daher bei Flächenladung:

$$(14c) \quad W'_e = \frac{e^2}{2Q'} = \frac{e^2}{2a} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta} \cdot \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Den Fall der Volumenladung aber können wir sofort auf denjenigen der Flächenladung zurückführen. Es gilt nämlich in der Potentialtheorie der bemerkenswerte Satz <sup>2)</sup>: Die Selbst-

1) Vgl. z. B. J. C. Maxwell, Treatise 1. p. 244 der deutschen Übersetzung.

2) In meiner ersten Mitteilung (Göttinger Nachrichten p. 36. 1902) gab ich einen Beweis dieses Satzes; der Satz ergibt sich sofort, wenn man in den Ausdruck für die elektrostatische Energie des Vollellipsoids [§ 12, Gl. (29a)] den bei E. Betti (Lehrb. d. Potentialtheorie p. 259. 1885) angegebenen Ausdruck für die Kapazität ( $Q'$ ) des leitenden Ellipsoids einsetzt. Dann erhält man  $W'_e = \frac{1}{2} e^2 / Q'$  als Energie des Vollellipsoids.

potentiale (elektrostatischen Energien) zweier Ellipsoide von gleicher Form, von denen das eine gleichförmig über sein Volumen geladen ist, während bei dem anderen die Verteilung der nämlichen Gesamtladung der Gleichgewichtsverteilung auf der Oberfläche des leitenden Ellipsoides entspricht, verhalten sich wie 6:5. Daraus folgt, als *elektrostatische Energie des Systems S, bei Volumenladung*:

$$(14d) \quad W'_e = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{Q'} = \frac{3e^2}{5a} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta} \cdot \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right).$$

Nach Gleichung (14) besteht dasselbe konstante Verhältnis 6:5 zwischen den Werten der Lagrangeschen Funktion des Elektrons bei Volumenladung bez. Flächenladung.

Bei Volumenladung ist die *Lagrangesche Funktion*

$$(15) \quad L = -\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{a} \cdot \left( \frac{1-\beta^2}{2\beta} \right) \cdot \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right), \quad \beta = \frac{q}{c} < 1.$$

Nach (12c) beträgt der *Impuls des Elektrons*

$$(15a) \quad G = \frac{dL}{dq} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{ac} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left\{ \left( \frac{1+\beta^2}{2\beta} \right) \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\}$$

und, nach (12d), die *Energie*

$$(15b) \quad W = -L + qG = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\}.$$

Durch Addition bez. Subtraktion von (15), (15b) ergeben sich für den *magnetischen* bez. *elektrischen Anteil der Energie* die Werte:

$$(15c) \quad W_m = \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2}{a} \cdot \left\{ \left( \frac{1+\beta^2}{2\beta} \right) \cdot \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\},$$

$$(15d) \quad W_e = \frac{3}{10} \cdot \frac{e^2}{a} \cdot \left\{ \left( \frac{3-\beta^2}{2\beta} \right) \cdot \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right\}.$$

Entwickelt man die beiden letzten Ausdrücke in Reihen, die nach Potenzen von  $\beta^2$  fortschreiten, und vernachlässigt Größen von der Ordnung  $\beta^4$ , so wird:

$$(15e) \quad W_e = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{a}, \quad W_m = \frac{4}{5} \cdot \frac{e^2}{ac^2} \cdot \frac{q^2}{2}.$$

Bei den geringen Geschwindigkeiten langsamer Kathodenstrahlen ist mithin die elektrische Energie von der Geschwindigkeit unabhängig, die magnetische dem Quadrate derselben proportional, wie die potentielle bez. die kinetische Energie der gewöhnlichen Mechanik. Hier gilt noch diejenige Voraus-

setzung, auf der fußend die analytische Mechanik zu den Beziehungen gelangt, welche Energie und Impuls mit der Lagrangeschen Funktion verknüpfen. Bei größeren Geschwindigkeiten gilt diese Voraussetzung nicht mehr; die Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Energie von der Geschwindigkeit ist hier eine kompliziertere. *Unsere elektromagnetische Begründung jener Beziehungen jedoch gilt für beliebige, unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegende Geschwindigkeiten. Sie dehnt den Machtbereich der Lagrangeschen Mechanik in sehr bemerkenswerter Weise aus.*

### § 8. Quasistationäre Translationsbewegung. Elektromagnetische Masse.

Die beiden letzten Abschnitte lehrten Feld, Energie und Impuls kennen, die gleichförmiger Translation des Elektrons entsprechen. Dieselben hängen nur von der Geschwindigkeit ab; das gilt freilich in Strenge nur dann, wenn die Geschwindigkeit seit unendlich langer Zeit eine gleichförmige war. Jede Beschleunigung, die das Elektron einmal erfahren hat, wirkt in der Weise nach, daß von dem Orte, in dem das Elektron sich damals befand, elektromagnetische Kugelwellen mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum hinaus eilen. Die Feldstärken dieser Wellen, mithin auch die Dichten der in ihnen enthaltenen Energie und Bewegungsgröße, hängen von der damals dem Elektron erteilten Beschleunigung ab. Hat überhaupt jemals eine Beschleunigung stattgefunden, so sind Energie und Impuls nicht mehr ausschließlich von der momentanen Geschwindigkeit abhängig, die Formeln des vorigen Paragraphen gelten dann also nicht mehr exakt. Dieser Umstand erschwert die strenge Behandlung ungleichförmiger Elektronenbewegung. Wir werden uns einer Annäherungsmethode bedienen, die sich bereits in der Elektrodynamik des Leitungsstromes bewährt hat.

Ist der elektrische Strom, der einen Leitungsdraht durchfließt, stationär, d. h. war die Stromstärke seit jeher konstant, so ist das magnetische Feld durch die Stromstärke bestimmt; sobald aber der Strom seine Intensität ändert, entspricht das Feld nicht mehr genau der momentanen Stromstärke; dasselbe hängt auch von der zeitlichen Änderung der Stromstärke ab.

Bei schnellen Schwingungen, von der Frequenz der Hertzschens, kommt diese letztere Abhängigkeit wesentlich in Betracht; sie gibt sich insbesondere durch die Wellen kund, die von einem Hertzschens Erreger ausgesandt werden. In der Theorie der Wechselströme geringerer Frequenz hingegen pflegt man diesen Umstand nicht zu beachten. Man berechnet das magnetische Feld der jeweiligen Stärke und Verteilung des Stromes gemäß so, als ob der Strom stationär wäre; aus der Energie des so berechneten Feldes leitet man die Selbstinduktion ab, die einer zeitlichen Änderung der Stromstärke entgegenwirkt. Diese Theorie des „quasistationären Stromes“ hat sich für hinreichend langsame Stromschwankungen als durchaus zuverlässig erwiesen; die in ihr nicht enthaltene Ausstrahlung kommt nur bei sehr rapiden Stromschwankungen in Betracht.

Dem stationären Leitungsstrom entspricht hier stationärer Konvektionsstrom, das ist gleichförmige Elektronenbewegung. Dem quasistationären Strome entspricht „*quasistationäre Bewegung*“. Wir bezeichnen eine Bewegung des Elektrons als quasistationär, wenn die Geschwindigkeitsänderung so langsam erfolgt, daß man den Impuls aus der jeweiligen Geschwindigkeit, wie bei stationärer Bewegung, berechnen kann. Wann es gestattet ist, eine Bewegung als quasistationär zu betrachten, darüber werden wir im nächsten Paragraphen Auskunft zu gewinnen suchen.

Der Selbstinduktion in der Theorie des Leitungstromes entspricht in der Dynamik des Elektrons die „*elektromagnetische Masse*“. Es hat, wie in der Einleitung erwähnt wurde, das Experiment dazu geführt, den Elektronen eine träge Masse zuzuschreiben, eine Masse, die bei den Geschwindigkeiten der langsamen Kathodenstrahlen merklich konstant, bei denen der Becquerelstrahlen Funktion der Geschwindigkeit ist. Es hat sich also hier das zweite Axiom Newtons wenigstens in dem Sinne bestätigt, daß der Quotient aus Beschleunigung und Kraft von dem Betrage der Kraft unabhängig ist. Um ein derartiges Verhalten aus der elektromagnetischen Theorie zu deduzieren, gehen wir aus von einer Bewegung des Elektrons, welche dem ersten Axiome Newtons Genüge leistet, nämlich von reiner Translationsbewegung. Wir ändern sie durch eine äußere Kraft ab; erfolgt die Beschleunigung quasistationär,

so läßt sich die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung in der Tat durch eine elektromagnetische Masse charakterisieren.

Bei quasistationärer, rotationsloser Bewegung ist der Impuls des Elektrons seiner jeweiligen Geschwindigkeit parallel gerichtet; es ist mithin  $[q \mathfrak{G}] = 0$ ; ferner verschwindet der Drehimpuls. Es ist also die zweite der Bewegungsgleichungen (VIIb) ohne Heranziehung von Drehkräften durch die angenommene reine Translationsbewegung erfüllt. Der Impuls wird durch die äußere Kraft  $\mathfrak{R}$  der ersten Bewegungsgleichung (VIIa) gemäß abgeändert. Es ist

$$(16) \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{R}.$$

Der Betrag  $G$  des Impulses ist dabei, wie angenommen wird, nur von der jeweiligen Geschwindigkeit  $q$  abhängig.

Wir zerlegen die äußere Kraft  $\mathfrak{R}$  in eine Komponente  $\mathfrak{R}_\parallel$  parallel der Bewegungsrichtung, und eine zu dieser senkrechte Komponente  $\mathfrak{R}_\perp$ . Erstere ruft eine Zunahme der zur Bahn tangentiellen Komponente des Impulses hervor, letztere eine Änderung der Impulsrichtung. Da  $\mathfrak{G}$  und  $q$  in Richtung der Bewegung weisen, so sind die in Richtung der Bahntangente fallenden Komponenten der zeitlichen Änderung dieser Vektoren gleich den zeitlichen Änderungen ihrer Beträge. Es folgt:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \mathfrak{R}_\parallel.$$

*Den Quotienten der in Richtung der Bewegung genommenen Komponenten von Kraft und Beschleunigung*

$$(16a) \quad \mu_\parallel = \frac{dG}{dq}.$$

nennen wir „longitudinale elektromagnetische Masse“. Die zur Bewegungsrichtung senkrechte Komponente der zeitlichen Änderung des Impulses berechnet man folgendermaßen. Der Impulsvektor ist stets der Bewegungsrichtung parallel; er wird, wie diese, mit der Winkelgeschwindigkeit  $(q/r)$  im Raume gedreht, wenn  $r$  den Krümmungsradius der Bahn bezeichnet. Die gesuchte Komponente von  $d\mathfrak{G}/dt$  beträgt demnach  $G \cdot q/r = \mathfrak{R}_\perp$ ; sie weist nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn hin. Die Kraftkomponente  $\mathfrak{R}_\perp$ , welche diese Impulsänderung hervorruft, ist demnach gleichfalls dem Krümmungsradius der Bahn parallel; die entsprechende Komponente der



Beschleunigung beträgt  $q^2/r$ , mithin der Quotient aus transversaler Kraft und transversaler Beschleunigung, die „transversale elektromagnetische Masse“

$$(16b) \quad \mu_r = \frac{G}{q}.$$

Bei langsamer Bewegung ist, wie sich durch Reihenentwicklung von (15a) ergibt, der Impuls  $G$  annähernd der Geschwindigkeit  $q$  proportional. Hier wird die longitudinale Masse der transversalen gleich; dieses bei langsamen Kathodenstrahlen experimentell gefundene Resultat wird durch die Formeln (16a), (16b) im Sinne der elektromagnetischen Theorie erklärt. Als Grenzwert beider Massen erhält man:

$$(16c) \quad \mu_r = \mu_r = \mu_0,$$

wo

$$\mu_0 = \frac{4}{3} \frac{e^2}{a} \text{ bei Volumenladung,}$$

$$\mu_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \text{ bei Flächenladung;}$$

$e = |e|/c$  bezeichnet hierbei den Betrag der Ladung, gemessen in absoluten elektromagnetischen Einheiten. Die genauesten Messungen an Kathodenstrahlen<sup>1)</sup> ergaben:

$$\frac{e}{\mu_0} = 1,865 \cdot 10^7.$$

Mithin erhalten wir als Radius des Elektrons

$$(16d) \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3} \cdot e \cdot 1,865 \cdot 10^7 \text{ bei Volumenladung,} \\ a = \frac{2}{3} \cdot e \cdot 1,865 \cdot 10^7 \text{ bei Flächenladung.} \end{cases}$$

Der geringfügige Unterschied des Zahlenfaktors, der Volumen- und Flächenladung trennt, kommt hier nicht so sehr in Betracht, wie die Unsicherheit in der Kenntnis des elektrischen Elementarquantums. Setzt man die Ladung des Elektrons gleich der Ionenladung, so gilt<sup>2)</sup>

$$2 \cdot 10^{-10} < |e| < 20 \cdot 10^{-10},$$

mithin

$$10^{-13} \text{ cm} < a < 10^{-12} \text{ cm}.$$

Die elektrische Feldstärke  $|e|/a^2$ , die an der Oberfläche des ruhenden Elektrons herrscht, beträgt in absoluten elektrostatischen Einheiten  $2 \cdot 10^{15}$  bis  $2 \cdot 10^{16}$ ; von derselben Größen-

1) S. Simon, Wied. Ann. 69. p. 599. 1899; W. Seitz, Ann. d. Phys. 8. p. 233. 1902.

2) Vgl. E. Riecke, Lehrb. d. Phys. II. 2 Aufl. p. 382 u. 386. 1902.

ordnung ist die magnetische Feldstärke, die bei großen Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Elektrons auftritt. Die Feldstärken, mit denen unsere Theorie rechnet, übertreffen demnach billionenfach die der direkten Messung zugänglichen.

Ist die Geschwindigkeit des Elektrons nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so ist der Impuls nicht mehr der Geschwindigkeit proportional; dann hängen longitudinale und transversale Masse von der Geschwindigkeit ab, und zwar in verschiedener Weise. Die Formel (15a) ergibt:

$$(16e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_s = \frac{3}{2} \cdot \mu_0 \chi(\beta), \\ \chi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left\{ -\frac{1}{\beta} \cdot \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{2}{1-\beta^2} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(16f) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_r = \frac{3}{2} \cdot \mu_0 \cdot \psi(\beta), \\ \psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left\{ \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) \cdot \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1 \right\}. \end{array} \right.$$

Diese Formeln für longitudinale und transversale Masse beziehen sich sowohl auf Volumenladung, wie auf Flächenladung.

Die Formel (16f) ist es, die von Hrn. W. Kaufmann auf Grund seiner Messungen über die Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen im Intervalle ( $\beta = 0,60$  bis  $\beta = 0,95$  etwa) geprüft wurde. Er fand die Formel innerhalb der Fehlergrenze der Versuche (1 Proz. bis 1,5 Proz.) bestätigt. Messende Versuche bei mittleren Geschwindigkeiten ( $\beta = 0,3$  bis  $\beta = 0,6$ ) liegen bisher nicht vor. Ebenso wenig liegen Versuche über longitudinale Beschleunigung rasch bewegter Elektronen vor, welche etwa zur Prüfung der Formel (16e) herangezogen werden könnten. Auch würde diese Formel wohl hier nicht so gute Dienste leisten, wie die Formeln (15a), (15b) für Impuls und Energie, welche direkt die vom äußeren Felde in einer gegebenen Zeit bez. auf einer gegebenen Strecke dem Elektron erteilte Geschwindigkeit bestimmen.

Ordnet man nach aufsteigenden Potenzen von  $\beta$ , so erhält man die für  $\beta < 1$  konvergenten Reihenentwickelungen:

$$(16g) \quad \mu_s = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \cdot \beta^2 + \frac{9}{7} \cdot \beta^4 + \frac{12}{9} \cdot \beta^6 + \dots \right\},$$

$$(16h) \quad \mu_r = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{6}{3.5} \cdot \beta^2 + \frac{9}{5.7} \cdot \beta^4 + \frac{12}{7.9} \cdot \beta^6 + \dots \right\}.$$

Aus denselben geht hervor, daß, den Grenzfall sehr langsamer Bewegung ausgenommen, die longitudinale Masse stets

größer ist, als die transversale. Ist nun die äußere Kraft schief zur Bewegungsrichtung orientiert, so ruft ihre longitudinale Komponente eine geringere Beschleunigung hervor, als die transversale Komponente. Der resultierende Beschleunigungsvektor schließt daher mit der Bewegungsrichtung einen größeren Winkel ein, als der Kraftvektor, es sei denn, daß beide Winkel 0 oder  $\pi/2$  betragen. Die funktionelle Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung wird in der Dynamik des Elektrons durch eine lineare Vektorfunktion allgemeiner Art, als in der gewöhnlichen Mechanik, dargestellt. Die elektromagnetische Masse, das Koeffizientensystem der linearen Vektorfunktion, ist ein Tensor<sup>1)</sup> von rotatorischer Symmetrie, dessen Symmetrieachse durch die Bewegungsrichtung des Elektrons bestimmt ist.

#### § 9. Ausstrahlung des beschleunigten Elektrons. Grenzen der quasistationären Bewegung.

Die Definition einer elektromagnetischen Masse, und die Gültigkeit des zweiten Newtonschen Axiomes in der soeben angegebenen Fassung, setzt wesentlich quasistationäre Bewegung voraus. *Welches sind nun die Grenzen des quasistationären Bewegungszustandes?* Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten. Will man genau den Fehler berechnen, den man begeht, wenn man bei einer gegebenen ungleichförmigen Bewegung den Impuls von der jeweiligen Geschwindigkeit nach Gleichung (15a) abhängen läßt, so muß man exakt das Feld angeben, welches der Vorgeschichte der Bewegung entspricht. Hier indessen, wo es nur auf die rohe Abschätzung der Größenordnung des begangenen Fehlers ankommt, werden wir uns einer anderen, in diesem Abschnitte darzulegenden Methode bedienen. Dieselbe ersetzt das Elektron durch einen elektrischen Punkt und berechnet Feld und Impuls mit Hülfe des von den Herren E. Wiechert<sup>2)</sup> und Th. des Coudres<sup>3)</sup> in der Lorentz-Festschrift aufgestellten *Potentialpunktgesetzes*. Sie geht dabei von folgender Problemstellung aus.

1) Vgl. W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Leipzig 1898; M. Abraham, Encykl. der mathem. Wissensch. 4. Art. 14. 1901.

2) E. Wiechert, Arch. Néerland. (2) 5. p. 549. 1900; Ann. d. Phys. 4. p. 667. 1901.

3) Th. des Coudres, Arch. Néerland. (2) 5. p. 652. 1900.

Das Elektron soll von Anbeginn an in gleichförmiger translatorischer Bewegung begriffen gewesen sein; deren Geschwindigkeit bezeichnen wir mit  $q_1$ . Zur Zeit  $t_1$ , im Punkte  $P_1$  beginnen äußere Kräfte einzuwirken. Das Intervall der jetzt beginnenden ungleichförmigen Bewegung dauere bis zur Zeit  $t_2$ ; das Elektron mag sich dann im Punkte  $P_2$  befinden. Von nun an werde wieder eine der Richtung und dem Betrage nach konstante Geschwindigkeit  $q_2$  angenommen. Man warte dann noch eine gewisse Zeit  $(t_3 - t_2)$ . Auf Grund des Punktesatzes läßt sich über das Feld, das zur Zeit  $t_3$  besteht, folgendes aussagen.

Außerhalb der Kugel  $K_1$ , die um  $P_1$  mit dem Radius  $c(t_3 - t_1)$  konstruiert ist, entspricht das Feld der durch  $q_1$  bestimmten stationären Bewegung. Innerhalb der Kugel  $K_2$ , die um  $P_2$  mit dem Radius  $c(t_3 - t_2)$  konstruiert ist, herrscht das Feld, welches gleichförmiger Geschwindigkeit  $q_2$  zukommt. Wir nehmen an, daß die Lichtgeschwindigkeit niemals erreicht oder überschritten wurde; alsdann liegt  $K_2$  stets innerhalb  $K_1$ ; nur der von diesen beiden exzentrischen Kugeln begrenzte Teil des Feldes hängt von der Beschleunigung ab, die dem Elektron im Intervalle  $t_1$  bis  $t_2$  erteilt worden ist. In solchen Gegenden des Feldes nun, deren Abstand vom Elektron groß gegen dessen Radius ist, darf das Elektron als Punktladung aufgefaßt werden. Machen wir die

*Annahme A:*  $(t_3 - t_2)(c - q_2)$  groß gegen  $a$ ,

die besagt: Der Abstand des dem Elektron nächsten Punktes der Kugel  $K_2$  ist groß gegen den Radius des Elektrons, so gilt dasselbe a fortiori für alle außerhalb der Kugel  $K_2$  liegenden Punkte. Hier darf man das Feld aus dem Punktesatze berechnen, freilich nur dann, wenn noch eine zweite Annahme erfüllt ist. Die Ableitung des Punktesatzes beruht nämlich auf einer stillschweigend gemachten Voraussetzung, die hier, wo es sich um ungleichförmige Bewegung handelt, nicht übergangen werden darf. Es wird beim Beweise des Gesetzes das Elektron zunächst als räumlich ausgedehnt angesehen; seine Volumenelemente liefern zu den Feldern des skalaren Potentials  $\Phi$  und des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  Beiträge, die mit Lichtgeschwindigkeit nach dem betreffenden Aufpunkte

hineilen, und die wesentlich von der Geschwindigkeit des Volumenelementes abhängen. Wenn nun die Geschwindigkeit des Elektrons sich merklich geändert hat in der Zeit  $(2a/c - q)$ , die das Licht braucht, um über das bewegte Elektron der Bewegungsrichtung parallel hinzustreichen, so sind für die einzelnen Volumenelemente verschiedene Geschwindigkeiten in Rechnung zu setzen, wenn man das Feld in demjenigen Aufpunkte ermitteln will, auf den das Elektron gerade hineilt. Es wird dann der Grenzübergang zur Punktladung unzulässig; er ist nur dann gestattet, wenn die

$$\text{Annahme } B: \frac{|\dot{q}|}{q} \cdot \frac{2a}{c - q} \text{ klein gegen } 1$$

erfüllt ist. Die relative Beschleunigung darf also nicht zu groß, und die Geschwindigkeit nicht zu nahe der Lichtgeschwindigkeit sein. (Auf ungleichförmige Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit darf das Punktesetz überhaupt nicht angewandt werden.)

Wir nehmen die Beschleunigung, die in dem Zeitintervalle  $t_1$  bis  $t_2$  stattfindet, so gering an, daß die Annahme  $B$  gilt, und warten bis zu einem Momente  $t_3$ , welcher die Annahme  $A$  erfüllt. Dann darf man das Feld innerhalb des von den Kugeln  $K_1, K_2$  begrenzten Raumes aus dem Punktesetz ableiten.

Die Herren E. Wiechert und Th. des Coudres haben sich auf die Berechnung der Potentiale  $\Phi, \mathfrak{A}$  beschränkt; das elektromagnetische Feld einer beschleunigten Punktladung aus den Gleichungen (IIg), (IIh) abzuleiten, haben sie unterlassen. Nachdem ich die etwas umständliche Durchrechnung der Differentiationen ausgeführt, und so die Feldstärken  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  ermittelt hatte, habe ich die Energie und den Impuls berechnet, welche in dem von den beiden Kugeln eingeschlossenen Teile des Feldes enthalten sind. Mit wachsender Zeit  $t_3$  nehmen die Radien der beiden Kugeln dauernd zu. Dabei konvergieren jene Größen gegen bestimmte Grenzwerte  $\Delta W, \Delta \mathfrak{G}$ , für die ich folgende Ausdrücke gefunden habe. Ich setze:

$$(17) \quad f(\beta) = \frac{(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \eta)}{(1 - \beta^2)^2}.$$

Dabei bezeichnet  $\eta$  den Winkel, den die Vektoren der Geschwindigkeit  $\mathbf{q}$  und der Beschleunigung  $\dot{\mathbf{q}}$  in dem betreffenden Zeitpunkte  $t_1 \leq t \leq t_2$  einschlossen. Dann wird

$$(17a) \quad \Delta W = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot f(\beta) \cdot |\dot{\mathbf{q}}|^2,$$

$$(17b) \quad \Delta \mathfrak{G} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \mathbf{q} \cdot f(\beta) \cdot |\dot{\mathbf{q}}|^2.$$

Diese Formeln ergeben die vom beschleunigten Elektron ausgesandte Energie- und Impulsstrahlung. Die Formel (17a) wäre heranzuziehen, wenn es sich um die Berechnung der Energie der Röntgenstrahlen handelt, die beim Aufprall sehr rasch bewegter Elektronen erregt wird. (Doch muß die Annahme (B) erfüllt sein.) Man kann jene Formel folgendermaßen deuten. Die auf die Zeiteinheit berechnete Energiestrahlung beträgt

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{q}}|^2 \cdot f(\beta).$$

Im Grenzfalle sehr langsamer Bewegung erhält man bei longitudinaler wie bei transversaler Beschleunigung die bekannte Formel

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot |\dot{\mathbf{q}}|^2.$$

Bei rascher Bewegung hingegen ist die Ausstrahlung eine andere, je nachdem es sich um longitudinale, oder um transversale Beschleunigung handelt. In ersterem Falle wird

$$\eta = 0, \quad f(\beta) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^3},$$

in letzterem

$$\eta = \frac{\pi}{2}, \quad f(\beta) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^3}.$$

Bei transversaler Beschleunigung ist die Energiestrahlung geringer als bei longitudinaler; das Gleiche gilt von der Impulsstrahlung. Die auf die Zeiteinheit berechnete Impulsstrahlung wird nach (17b) durch einen Vektor vom Betrage

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^4} \cdot \beta \cdot f(\beta) \cdot |\dot{\mathbf{q}}|^2$$

gegeben; derselbe weist parallel der Richtung, in der das Elektron sich bewegte, als ihm die betreffende Beschleunigung erteilt wurde.

Die Formel (17b) soll nun dazu dienen, den Gültigkeitsbereich der Theorie der quasistationären Bewegung abzugrenzen. Jene Theorie würde den zur Zeit  $t_3$  dem Felde zukommenden Impuls aus der momentanen Geschwindigkeit  $q_3$  des Elektrons so berechnen, ab ob die Bewegung von Anbeginn an eine gleichförmige gewesen wäre, d. h. aus Gleichung (15a). Wir nennen  $\mathcal{G}_2$  den so berechneten Impuls,  $\mathcal{G}_3$  den wirklich im Felde zur Zeit  $t_3$  enthaltenen. Es läßt sich nun leicht beweisen, daß in dem Maße, wie das Zeitintervall  $(t_3 - t_2)$  wächst,  $\mathcal{G}_3$  gegen den Grenzwert

$$(18) \quad \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_2 + \Delta \mathcal{G}$$

konvergiert. In der Tat, aus der Art, wie nach § 6 die Feldstärken des stationären Feldes sich im Unendlichen verhalten, schließt man, daß in dem von der Kugel  $K_2$  eingeschlossenen Felde bereits der ganze Impuls  $\mathcal{G}_2$  steckt, wenn die Zeit  $t_3$  die Annahme (A) erfüllt; aus demselben Grunde verschwindet gegen  $\mathcal{G}_2$  der Impuls des außerhalb  $K_1$  liegenden Feldes, das der gleichförmigen Geschwindigkeit  $q_1$  entspricht; der Impuls des zwischen den beiden Kugeln liegenden Feldes endlich beträgt  $\Delta \mathcal{G}$ . Mithin wird der Impuls des ganzen Feldes zur Zeit  $t_3$  durch (18) gegeben. Die Theorie der quasistationären Bewegung setzt nun

$$(18a) \quad \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{R} dt,$$

d. h. sie vernachlässigt den ausgestrahlten Impuls. Der von ihr bei der Berechnung des Impulses begangene relative Fehler beträgt mithin

$$(18b) \quad \frac{|\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_3|}{|\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1|} = \frac{|\Delta \mathcal{G}|}{|\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1|}.$$

Machen wir die

$$\text{Annahme C: } \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^4} \cdot \beta \cdot f(\beta) \cdot |\dot{q}|^2 \text{ klein gegen } |\mathfrak{R}|,$$

so ist, mit Rücksicht auf (17b), (18a), bei Einwirkung einer äußeren Kraft  $\mathfrak{R}$ , die ihre Richtung in dem Intervalle  $t_1 < t < t_2$  nicht wesentlich ändert, der Fehler (18b) zu vernachlässigen.  $|\mathfrak{R}|$  ist dabei aus der Theorie der quasistationären Bewegung zu berechnen.

Es ist bei longitudinaler Beschleunigung:

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}_s| = \mu_s \cdot |\dot{q}|,$$

bei transversaler Beschleunigung:

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}_r| = \mu_r \cdot |\dot{q}|.$$

Dabei ist nach (16c), (16e), (16f) bei Volumenladung

$$\mu_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^2 a} \cdot \chi(\beta), \quad \mu_r = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^2 a} \cdot \psi(\beta)$$

zu setzen. Mithin kann man die Bedingung (8) durch zwei andere ersetzen:

$$(C_1) \quad \frac{10}{9} \cdot \frac{a}{c^2} \cdot \frac{\beta}{(1-\beta^2)^3} \cdot \frac{|\dot{q}|}{\chi(\beta)} \text{ klein gegen } 1$$

*bei longitudinaler Beschleunigung,*

$$(C_2) \quad \frac{9}{10} \cdot \frac{a}{c^2} \cdot \frac{\beta}{(1-\beta^2)^3} \cdot \frac{|\dot{q}|}{\psi(\beta)} \text{ klein gegen } 1$$

*bei transversaler Beschleunigung.*

*Ist die Beschleunigung ihrem Betrage nach so gering, und liegt die Geschwindigkeit um so viel unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, daß die Bedingungen (C<sub>1</sub>) bez. (C<sub>2</sub>) erfüllt sind, so darf man die stattfindende Impulsänderung aus der Theorie der quasistationären Bewegung berechnen, freilich nur dann, wenn gleichzeitig die Bedingung (B) gilt. Gilt die Annahme (B) nicht, so wird die auf dem Punktesatz fußende Überlegung hinfällig, die uns zu der Bedingung (C) führte. Wir schreiben die Bedingung (B):*

$$(B) \quad 2 \cdot \frac{a}{c^2} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)} \cdot |\dot{q}| \text{ klein gegen } 1.$$

Eine ausführliche Diskussion der Frage, welche von den Bedingungen (B), (C) mehr und welche weniger verlangt, würde hier zu weit führen. Bei langsamer Bewegung, das übersieht man sofort, ist der Faktor von  $|\dot{q}|$  in (B) größer als in (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>); es sind hier demnach alle Bewegungen, auf die das Punktesatz anzuwenden ist, noch als quasistationär zu betrachten. Um zu beurteilen, mit welcher Annäherung jene Bedingungen bei rascheren, aber noch beobachtbaren Bewegungen erfüllt sind, greifen wir einen möglichst ungünstigen Fall heraus, nämlich die raschesten der von Kaufmann untersuchten Becquerelstrahlen; für dieselben ist  $\beta = 0,95$ ,  $1 - \beta = 0,05$ ,



$\psi(\beta) = 3$ . Da es sich um transversale Beschleunigung handelt, kommt die Formel (C<sub>2</sub>) in Frage, in der

$$|\dot{q}| = \frac{q^2}{r} = \frac{c^2}{r}$$

gesetzt werden mag;  $r$ , der Krümmungsradius der Bahn, betrug im magnetischen Felde von 300 absoluten Einheiten 12 cm. Setzt man endlich  $a = 10^{-12}$ , so erhält man für die Größen, die nach (C<sub>2</sub>) bez. nach (B) klein gegen 1 sein sollen, denselben Wert  $3 \cdot 10^{-12}$ . Und wenn man das magnetische Feld selbst 100mal stärker macht, so erreicht der bei der Anwendung des Punktesatzes und der Theorie der quasistationären Bewegung begangene relative Fehler immer noch nicht  $10^{-9}$ . Man sieht hieraus: *In allen praktischen Fällen ist auch auf die raschesten Becquerelstrahlen die Theorie der quasistationären Bewegung anzuwenden.*

Übrigens würde man fehl gehen, wenn man versuchen würde, durch Berücksichtigung des Gliedes  $\Delta \mathcal{G}$  die Theorie zu verbessern. Haben wir doch immer nur das idealisierte Problem behandelt, bei dem das Elektron als allein im Raume befindlich betrachtet wurde. Gerade die vom Elektron ausgesandte Strahlung aber wird wesentlich durch die Körper, die das Feld begrenzen, beeinflußt werden. Ferner sind sehr viele Elektronen in den Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen vorhanden. In einem magnetischen oder elektrischen Felde werden dieselben „kohärent“ beschleunigt. Da die Dichten der Energie und der Bewegungsgröße nicht linear in den Feldstärken sind, so superponieren sich Energie- und Impulsstrahlung der einzelnen Elektronen keineswegs. *Die Formeln (17 a), (17 b) geben nur die Ausstrahlung bei inkohärenter Beschleunigung des Elektronenschwarmes.* (Bei der Emission der Röntgenstrahlen dürfte solche vorliegen.) Die freie Bewegung des Elektronenschwarmes, und ebenso die magnetisch oder elektrisch abgelenkte stellt einen stationären Strom vor; die Ausstrahlung eines solchen ist Null. Hieraus erhellt, daß unsere Theorie, indem sie die Ausstrahlung des einzelnen Elektrons vernachlässigt, gerade innerhalb derjenigen Grenzen der Genauigkeit bleibt, die ihr durch Vernachlässigung des Einflusses der fremden Körper und der Wechselwirkung der einzelnen Elektronen von vornherein gezogen wurden.

§ 10. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen für die ausgezeichneten Bewegungen.

Im siebenten Abschnitte zeigten wir, daß für reine Translationsbewegung einer beliebig verteilten Ladung gewisse Relationen der analytischen Mechanik gelten, welche die Zurückführung des Impulses und der Energie auf eine einzige Funktion ermöglichen. Der dort gegebene Beweis setzt in Evidenz, daß es sich hierbei um Eigenschaften des von gleichförmiger Bewegung der Elektrizität erregten stationären Feldes handelt; hatten wir doch damals Beschleunigungen überhaupt noch nicht in Betracht gezogen. In diesem Abschnitte nun wollen wir den Gültigkeitsbereich der Lagrangeschen Mechanik noch weiter ausdehnen; wir wollen auch rotatorische Bewegungen einbeziehen, welche zur Klasse der „ausgezeichneten Bewegungen“ gehören. Dabei wollen wir einem anderen Beweise folgen. *Wir gelangen zu den zwischen der Lagrangeschen Funktion und den Impulskomponenten bestehenden Beziehungen, indem wir den Energiesatz und die Impulssätze auf quasistationäre Bewegungen anwenden.* Dieser zweite allgemeinere Beweis legt so — dadurch ist er dem ersten überlegen — die dynamischen Wurzeln der Lagrangeschen Gleichungen bloß; er arbeitet hingegen nicht so klar, wie der erste Beweis, die Tatsache heraus, daß es im Grunde die Eigenschaften der stationären Felder sind, die es gestatten, die Dynamik der ausgezeichneten Bewegungen aus der Lagrangeschen Funktion abzuleiten. Andererseits kann, gerade weil es sich um die Ableitung von Eigenschaften stationärer Bewegungen handelt, die Heranziehung quasistationärer Bewegungen keinem Bedenken unterliegen. Es können ja die Beschleunigungen willkürlich, und zwar so gering gewählt werden, daß der beim Rechnen mit quasistationärer Bewegung begangene Fehler beliebig klein wird. Im Grenzfall einer unendlich kleinen Beschleunigung gelten alle erhaltenen Relationen exakt; diejenigen unter ihnen, welche die Beschleunigungskomponenten nicht mehr enthalten, formulieren Eigenschaften der stationären Bewegung.

Das Feld der ausgezeichneten Bewegungen (vgl. § 5) war, von dem mit dem Elektron starr verbundenen Gerüst aus be-

trachtet, stationär. Diese charakteristische Eigenschaft kam der reinen Translationsbewegung einer beliebig verteilten Ladung zu (vgl. § 6); in der Tat werden wir in § 12 die Stabilität der Translation eines Ellipsoides auf Grund der jetzt zu entwickelnden Beziehungen behandeln. *Ziehen wir aber Rotationen in Betracht, so wollen wir uns stets auf unser allseitig symmetrisches Elektron beschränken.* Wir untersuchen Bewegungen desselben, bei denen die Vektoren  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{\vartheta}$  der translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeit konstante Beträge und im Raume feste Richtungen besitzen. Hier gilt in betreff der Vorgeschichte der Bewegung die gleiche Überlegung, die im § 6 angestellt wurde; sie führt zu dem Schlusse, daß das Feld, bezogen auf ein mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{q}$  rein translatorisch bewegtes Koordinatensystem, stationär ist; mithin nehmen die Feldgleichungen (IIe), (II f) die Form an:

$$(19) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = -4\pi\rho,$$

$$(19a) \quad \begin{cases} (1 - \beta^2) \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_x}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_x}{\partial z^3} = -4\pi\rho\beta \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{4\pi\rho}{c}(\vartheta_y z - \vartheta_z y). \end{cases}$$

$$(19b) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_y}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_y}{\partial z^3} = -\frac{4\pi\rho}{c}(\vartheta_z x - \vartheta_x z),$$

$$(19c) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \mathfrak{U}_z}{\partial z^3} = -\frac{4\pi\rho}{c}(\vartheta_x y - \vartheta_y x).$$

Die  $x$ -Achse ist dabei wieder in die Translationsrichtung gelegt. Auch hier überzeugt man sich mit Hülfe der Potentialtheorie leicht davon, daß die Potentiale  $\Phi$ ,  $\mathfrak{U}$  und die Feldstärken  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  sich im Unendlichen so verhalten, wie es bei der Herleitung des Energiesatzes (VI) und der Impulssätze (VIIa), (VIIb) vorausgesetzt wurde.

Welche von den betrachteten Bewegungen gehören der Klasse der ausgezeichneten Bewegungen an? Bei welchen sind die Fehler des Skalars  $\Phi$  und des Vektors  $\mathfrak{U}$  auch dann stationär, wenn man sie von dem mit dem Elektron rotierenden Gerüst aus betrachtet?

Aus der Form der Differentialgleichungen (19) bis (19c) geht sofort hervor, daß die  $x$ -Achse eine Vorzugsrichtung des Feldes ist, wenn überhaupt translatorische Bewegung angenommen wird. Alsdann aber ist das Feld, vom Gerüst aus betrachtet, dann und nur dann stationär, wenn die im Raume feste Richtung des Vektors  $q$  eine feste Lage im Gerüst besitzt, d. h. wenn die Richtungen der Bewegung und der Drehachse zusammenfallen. Also: *gleichförmige Translation, verbunden mit gleichförmiger Rotation um die Bewegungsrichtung, ist eine „ausgezeichnete“ Bewegung des Elektrons; sie enthält als Spezialfälle: Reine Translation und reine Rotation.* Da das Feld dieser Bewegung sowohl in Bezug auf ein nur translatorisch mitbewegtes, als auch in Bezug auf ein gleichzeitig mitrotierendes Koordinatensystem stationär ist, so müssen Impuls  $\mathfrak{G}$  und Drehimpuls  $\mathfrak{M}$  des Feldes konstante Beträge und solche Richtungen besitzen, die sowohl im Raume, als auch im Elektron fest sind. Ihre Richtungen fallen also zusammen mit der gemeinsamen Richtung der Vektoren  $q$ ,  $\vartheta$ . Es folgt daraus: *Die betrachtete Bewegung des Elektrons erfüllt die Bewegungsgleichungen (VIIa), (VIIb) ohne die Einwirkung einer äußeren Kraft oder Drehkraft zu erfordern.*

Um näheres über das Feld der in Rede stehenden Bewegung zu erfahren, setzen wir in den Gleichungen (19) bis (19c)  $\vartheta_y = \vartheta_z = 0$ , und zur Abkürzung  $\vartheta_x = \vartheta$ , und erhalten

$$(20) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi \varrho,$$

$$(20a) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_x}{\partial z^2} = -4\pi \varrho \beta,$$

$$(20b) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_y}{\partial z^2} = +\frac{4\pi \varrho}{c} \cdot \vartheta z,$$

$$(20c) \quad (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_z}{\partial z^2} = -\frac{4\pi \varrho}{c} \cdot \vartheta y.$$

Setzen wir, wie im § 6

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

so werden diese Differentialgleichungen auf die Form gewöhnlicher Potentialgleichungen gebracht. Wie dort, so folgt auch

hier, daß  $\Phi$  und  $\mathfrak{A}_x$  im Unendlichen von der ersten Ordnung des reziproken Abstandes vom Elektron verschwinden.  $\mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  aber würden Potentialen von Massen entsprechen, deren Vorzeichen für entgegengesetzte  $z$  bez.  $y$  das entgegengesetzte sind, deren Gesamtmasse also Null ist; solche Potentiale verschwinden im Unendlichen von der zweiten Ordnung. Daraus folgt aber, daß der durch (7a) definierte Skalar

$$\varphi = \Phi - \frac{1}{c} (v \mathfrak{A}) = \Phi - \beta \mathfrak{A}_x + \beta (z \mathfrak{A}_y - y \mathfrak{A}_z),$$

der hier bei der ausgezeichneten Bewegung die Bedeutung des Konvektionspotentials besitzt, von der ersten Ordnung verschwindet; da ferner die Komponenten der Feldstärken  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  im Unendlichen mindestens von der zweiten Ordnung verschwinden, so folgt, ebenso wie im § 7, aus der Regel  $\varepsilon$  die Relation

$$(20d) \quad \iiint \frac{d\varphi}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{H}) = \iiint \frac{d\varphi \varrho \varphi}{2}.$$

Auch die Gültigkeit der Gleichung (9d) des § 5 setzt das Verschwinden gewisser über die unendlich ferne Grenzfläche erstreckter Integrale voraus, das nunmehr leicht zu verifizieren ist. Ferner beruht die Gleichung (9d) auf der Annahme, daß dem über das ganze unendliche Feld erstreckten Integrale

$$\iiint \frac{d\varphi}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{A})$$

ein endlicher Wert zukommt. Von der Richtigkeit dieser Annahme müssen wir uns jetzt überzeugen, umso mehr, als wir weiterhin, den stationären Charakter des Feldes berücksichtigend, den Differentialquotienten dieses Integrals nach der Zeit gleich Null setzen werden. Aus den Differentialgleichungen (19) bis (19c) folgt auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Elektrons:

$\Phi, \mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  sind symmetrisch zur  $(yz)$ -Ebene, mithin

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}$  antisymmetrisch zur  $(yz)$ -Ebene,

$\mathfrak{A}_y$  ist symmetrisch,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  antisymmetrisch zur  $(xz)$ -Ebene,

$\mathfrak{A}_z$  ist symmetrisch,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  antisymmetrisch zur  $(xy)$ -Ebene.

Wir berechnen nun das Integral:

$$\iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{M}) = \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} \iiint \{ \mathfrak{E}_x \mathfrak{M}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{M}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{M}_z \}.$$

Nach (IIg), und da

$$\frac{\partial}{\partial t} = -q \frac{\partial}{\partial x}$$

zu setzen ist, wird

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial x},$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial x}.$$

Aus dem obigen folgt nun aber sofort, daß

$$\mathfrak{M}_x \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}_x \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}_y \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial x}, \quad \mathfrak{M}_z \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial x} \text{ antisymmetrisch zur } (yz)\text{-Ebene,}$$

$$\mathfrak{M}_y \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ antisymmetrisch zur } (xz)\text{-Ebene,}$$

$$\mathfrak{M}_z \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ antisymmetrisch zur } (xy)\text{-Ebene.}$$

Addiert man die Beiträge, welche acht durch Spiegelung an der Koordinatenebenen auseinander entstandene Volumenelemente zu dem Integrale liefern, so erhält man als Summe Null. Es folgt das Verschwinden des Integrals

$$(20e) \quad \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{M}) = 0.$$

Jetzt ergibt die Gleichung (9d) als *Ausdruck der Lagrange'schen Funktion*

$$(21) \quad L = W_m - W_e = - \iiint \frac{d\mathfrak{v} \mathfrak{E} \mathfrak{Q}}{2}.$$

Dieselbe gilt also nicht nur für reine Translation einer beliebig verteilten Ladung [vgl. (12a)], sondern auch für die anderen betrachteten ausgezeichneten Bewegungen des Elektrons. Aus (21), (20d) und (9c) folgt weiter:

$$(21a) \quad \iiint \frac{d\mathfrak{v}}{8\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{E}') = 0.$$

Daher werden die rechten Seiten von (9b), (9c) gleich, und wir erhalten

$$(21b) \quad L = (q \mathfrak{G}) + (\mathfrak{S} \mathfrak{M}) - W.$$

Für reine Translation war  $\mathfrak{S}' = 0$ , mithin (21a) gültig; (21b) war in (10g), (10h) enthalten.

Nunmehr gehen wir auf die Relation (8c) zurück, welche aus dem Energiesatz und den Impulssätzen gewonnen war. Für die ausgezeichneten Bewegungen nimmt dieselbe jetzt die Form an

$$(21c) \quad \frac{dL}{dt} = \left( \mathfrak{G} \frac{d'q}{dt} \right) + \left( \mathfrak{M} \frac{d'\vartheta}{dt} \right).$$

Hierbei wurden die zeitlichen Änderungen der Vektoren  $q$ ,  $\vartheta$  von einem im Elektron festen Achsenkreuz aus beurteilt; auf dasselbe Achsenkreuz sind dementsprechend auch  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{M}$  zu beziehen. Auf die betrachteten stationären Bewegungen angewandt, bei denen  $q$ ,  $\vartheta$  konstanten Betrag und feste Richtungen im Elektron besitzen, und auch Impuls und Lagrangesche Funktion konstant sind, würde die Gleichung (21c) nichts Neues lehren; es würde sich rechts wie links Null ergeben. Wir dürfen aber die Relation (21c) auch anwenden auf solche quasistationären Bewegungen, welche eine Folge ausgezeichneter Bewegungen darstellen. Denn die Gleichung (8c) bezog sich auf beliebige Bewegungen, und (21c) entstand aus jener, indem die für die betrachteten stationären Bewegungen bewiesene Relation (21b) eingesetzt wurde. Es ist nun gerade das für die quasistationären Bewegungen charakteristische, daß Impuls, Drehimpuls, elektrische und magnetische Energie aus der momentanen Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit so berechnet werden, als ob die Bewegung stationär wäre. Werden Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit allmählich abgeändert, doch so, daß der Bewegungszustand in jedem Momente zu der in Rede stehenden Klasse gehört, so gelten die Relationen (21b), (21c). So können wir z. B. *reine Translation einer beliebig verteilten Ladung*, ob nun zu ihrer Fortdauer eine äußere Drehkraft erforderlich sein mag oder nicht, quasistationär abgeändert denken; doch muß hierbei stets  $\vartheta_x = \vartheta_y = \vartheta_z = 0$  sein, sonst würde die Bewegung aufhören, eine ausgezeichnete zu sein; die Komponenten von  $q$  jedoch können beliebig abgeändert werden, und ihnen entsprechen jederzeit die Werte, welche die Lagrangesche Funktion, sowie die Komponenten von  $\mathfrak{G}$  gerade besitzen. Es folgt, daß für hinreichende kleine, aber sonst beliebige Werte von

$$\frac{d'q_x}{dt}, \quad \frac{d'q_y}{dt}, \quad \frac{d'q_z}{dt}$$

die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial L}{\partial q_x} \cdot \frac{d' q_x}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_y} \cdot \frac{d' q_y}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_z} \cdot \frac{d' q_z}{dt} \\ = \mathfrak{G}_x \cdot \frac{d' q_x}{dt} + \mathfrak{G}_y \cdot \frac{d' q_y}{dt} + \mathfrak{G}_z \cdot \frac{d' q_z}{dt}.$$

Daraus ergeben sich die Komponenten des Impulses, bezogen auf Achsen, die im bewegten Systeme fest sind

$$(22) \quad \mathfrak{G}_x = \frac{\partial L}{\partial q_x}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial L}{\partial q_y}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial L}{\partial q_z}.$$

Das ist die „erste Zeile der Lagrangeschen Gleichungen“.

Haben wir es andererseits mit reiner Rotation des Elektrons zu tun, bei der  $q_x = q_y = q_z = 0$  zu setzen ist, so können wir  $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$  uns in beliebiger Weise quasistationär abgeändert denken. Die Gleichung (21c) führt dann zu den Relationen

$$(22a) \quad \mathfrak{M}_x = \frac{\partial L}{\partial \vartheta_x}, \quad \mathfrak{M}_y = \frac{\partial L}{\partial \vartheta_y}, \quad \mathfrak{M}_z = \frac{\partial L}{\partial \vartheta_z}.$$

Ist jedoch die Rotation verbunden mit Translation in Richtung der Drehachse, so dürfen nicht die zu dieser Richtung (der  $x$ -Achse) senkrechten Komponenten  $\vartheta_y, \vartheta_z, q_y, q_z$  unabhängig geändert werden, ohne daß die Bewegung den Charakter einer ausgezeichneten verliert. Es sind hier nur  $\vartheta_x, q_x$  unabhängige Variable, es wird mithin

$$(22b) \quad \mathfrak{G}_x = \frac{\partial L}{\partial q_x}, \quad \mathfrak{M}_x = \frac{\partial L}{\partial \vartheta_x}.$$

Wir sahen jedoch bereits oben, daß in diesem Falle Impuls und Drehimpuls in Richtung der  $x$ -Achse weisen; es verschwinden mithin die übrigen Komponenten dieser Vektoren. Zusammenfassend sagen wir:

*Bei den betrachteten ausgezeichneten Bewegungen sind Impuls und Drehimpuls durch die erste Zeile der Lagrangeschen Gleichungen bestimmt.* — Dieses Resultat gilt für quasistationäre Bewegungen, die eine Folge ausgezeichneter Bewegungen darstellen, mit beliebiger Annäherung, wenn die Beschleunigungen hinreichend gering sind; es gilt mithin exakt für die stationären Bewegungen, die wir untersuchen. Als zweite Zeile der Lagrangeschen Gleichungen können wir die Bewegungsgleichungen (8), (8a) bezeichnen, in denen die Impulskomponenten auf im Elektron feste Achsen sich beziehen; hier sind die Relationen (22), (22a), (22b), welche die Impulskomponenten als



partielle Differentialquotienten der Lagrangeschen Funktion nach den Geschwindigkeitskomponenten ausdrücken, einzutragen, falls es sich um eine quasistationäre Folge ausgezeichnete Bewegungen handelt. *Die Energie derartiger Bewegungen ist vermöge (21b) in der aus der analytischen Mechanik bekannten Art aus der Lagrangeschen Funktion abzuleiten.*

Eine vereinfachte Formulierung der Lagrangeschen Mechanik erhält man, wenn man von den Lagrangeschen Gleichungen zum „*Hamiltonschen Prinzip*“ übergeht. Seine Bedeutung als Minimal- oder Maximalprinzip wird allerdings durch die Einschränkung auf die ausgezeichneten Bewegungen beeinträchtigt. Wir begnügen uns damit, den Beweis für rein translatorische Bewegungen zu führen; dabei gehen wir auf die Gleichung (VII) zurück, welche in unserer elektromagnetischen Mechanik das d'Alembertsche Prinzip vertrat. Wir integrieren über ein Intervall  $t_0$  bis  $t_1$ , und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta A_h - \iiint dv \left( \delta s, \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right) \right\} = 0.$$

Die virtuellen Parallelverschiebungen  $\delta s$  der Punkte des Elektrons bez. des mit ihm starr verbundenen Gerüsts denken wir uns dabei so vorgenommen, wie es das Hamiltonsche Prinzip verlangt; es müssen Anfangslage und Endlage dieselben sein für die wirkliche, wie für die variierte Bewegung ( $\delta s = 0$  für  $t = t_0$ ,  $t = t_1$ ), und ferner sind entsprechende Lagen der wirklichen und der variierten Bewegung gleichzeitig durchlaufen zu denken. Dann gilt

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \delta q.$$

Partielle Integration nach der Zeit ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta A_h + \iiint dv \left( \delta q, \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \right) \right\} = 0.$$

Nun ist aber

$$\iiint dv \left( \delta q, \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \right) = (\mathfrak{U} \delta q),$$

und ferner, nach (22)

$$(\mathfrak{G} \delta q) = \frac{\partial L}{\partial q_x} \delta q_x + \frac{\partial L}{\partial q_y} \delta q_y + \frac{\partial L}{\partial q_z} \delta q_z = \delta L,$$

mithin

$$(23) \quad \int_0^t dt \{ \delta A_h + \delta L \} = 0.$$

Für quasistationäre Translationsbewegungen gilt das Hamiltonsche Prinzip. Dabei ist die Bewegung des Elektrons nur durch virtuelle translatorische Verrückungen abzuändern; in ähnlicher Weise ist die Gültigkeit des Prinzips bei den anderen ausgezeichneten Bewegungen einzuschränken.

Für die betrachteten ausgezeichneten Bewegungen, die gleichzeitig quasistationär verlaufen, haben wir die analytische Mechanik Lagranges aus den Grundgleichungen der Dynamik des Elektrons hergeleitet. Dieses Resultat ist nicht nur von erkenntnistheoretischer, sondern auch von ökonomischer Bedeutung, weil es die Dynamik jener Bewegungen auf die Berechnung der Lagrangeschen Funktion zurückführt. Die Lagrangesche Funktion ist dabei, vermöge (21), ebenso wie bei reiner Translation, durch ein über das Volumen des Elektrons erstrecktes, vom Konvektionspotential abhängiges Integral bestimmt; das Konvektionspotential wiederum ist durch (7a) auf das skalare Potential  $\Phi$  und das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  zurückgeführt. Im nächsten Paragraphen werden wir die reine Rotation des Elektrons, und im übernächsten die Translation des Ellipsoides mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion behandeln.

#### § 11. Rotierendes Elektron. Elektromagnetisches Trägheitsmoment.

In den Entwicklungen der Abschnitte 6 bis 9 wurde immer die Annahme gemacht, daß keine äußere Drehkraft auf das Elektron wirkt. Wann tritt nun eine äußere Drehkraft  $\Theta$  auf?

In einem homogenen elektrischen Felde wird nach (1e):

$$(24) \quad \Theta = \iiint dv \varrho [\mathbf{r} \mathfrak{F}_h] = \left[ \iiint dv \varrho \mathbf{r}, \mathfrak{F}_h \right].$$

Denn hier ist  $\mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h$  für alle Punkte des Elektrons der gleiche Vektor. Da nun für unser allseitig symmetrisches Elektron

$\iiint d\mathbf{v} \varrho \mathbf{r} = 0$  ist, so folgt: In einem homogenen äußeren elektrischen Felde tritt keine Drehkraft auf. Wenn das Elektron rotationslos ist, so gilt für homogene magnetische Felder das Gleiche; hier ist  $\mathfrak{F}_h = [q \mathfrak{F}_h] \cdot 1/c$  ebenfalls für alle Punkte des Elektrons der gleiche Vektor.

Anders, wenn das Elektron bereits in Rotation begriffen ist; dann tritt im Vektor  $\mathfrak{F}_h$  ein Glied

$$\frac{1}{c} [\partial \mathbf{r}, \mathfrak{F}_h]$$

auf, das vermöge der Rechnungsregeln  $\beta$ ,  $\delta$  auf die Form

$$-\frac{\partial}{c} (\mathbf{r} \mathfrak{F}_h) + \frac{\mathbf{r}}{c} (\partial \mathfrak{F}_h)$$

gebracht wird. Die Ausführung der Integration ergibt in diesem Falle

$$(24a) \quad \Theta = \frac{e a^2}{5c} \cdot [\partial \mathfrak{F}_h]$$

als resultierende Drehkraft im homogenen magnetischen Felde im Falle von Volumenladung. (Bei Flächenladung wäre  $\frac{1}{2}$  statt  $\frac{1}{5}$  zu setzen). Die Drehkraft steht also senkrecht auf der Richtung der Drehachse und derjenigen des magnetischen Feldes.

In inhomogenen Feldern treten drehende Kräfte auch dann auf, wenn ursprünglich keine Rotation stattfand. Wir wollen etwa den Fall behandeln, daß der Kathodenstrahl ein inhomogenes elektrisches oder magnetisches Feld senkrecht zu den Kraftlinien durchsetzt; die  $x$ -Achsen legen wir parallel der Strahlrichtung, die positive  $y$ -Achse parallel der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}_h$ , oder, wenn es sich um magnetische Ablenkung handelt, die negative  $z$ -Achse parallel der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{F}_h$ . Der Vektor  $\mathfrak{F}_h$  weist dann jedesmal in Richtung der  $y$ -Achse. Seinen Betrag nennen wir  $F$ . (Im ersten Falle wird  $F = |\mathfrak{E}_h|$ , im zweiten  $F = \beta \cdot |\mathfrak{F}_h|$ ). Die Feldstärke soll nun längs der  $x$ -Achse variieren;  $F = dF/dx$  ist ein Maß für die Inhomogenität des Feldes. Innerhalb des vom Elektron eingenommenen Bereiches ist mit genügender Annäherung  $F = F_0 + F'_0 \cdot x$  zu setzen, wo  $F_0$ ,  $F'_0$  sich auf den Mittelpunkt des Elektrons beziehen. Alsdann wird die äußere Kraft:  $\mathfrak{R}_y = e \cdot F_0$ , die äußere Drehkraft aber:

$$(24b) \quad \Theta_z = \frac{e a^2}{5} \cdot F'_0$$

bei Volumenladung.

Wie verhält sich nun das Elektron gegenüber der Einwirkung drehender äußerer Kräfte? Diese Frage beantworten wir zunächst für den Fall, daß die Geschwindigkeit  $q$  des Mittelpunktes Null ist. Die *reine Rotation* gehört, wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde, zu den ausgezeichneten Bewegungen, deren Dynamik von der Lagrangeschen Funktion abhängt. Wir berechnen dieselbe auf dem dort angegebenen Wege. Zunächst bestimmen wir die Potentiale  $\Phi$ ,  $\mathfrak{A}$ , indem wir in den Gleichungen (20) bis (20c)  $\beta = 0$  setzen;  $\vartheta$  gibt dabei den Betrag der Drehgeschwindigkeit an; daß wir die  $x$ -Achse der Drehachse parallel gelegt haben, ist hier unwesentlich. Es gelten die Differentialgleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta \Phi = -4\pi \varrho, & \Delta \mathfrak{A}_x = 0, \\ \Delta \mathfrak{A}_y = \frac{4\pi \varrho}{c} \vartheta z, & \Delta \mathfrak{A}_z = -\frac{4\pi \varrho}{c} \vartheta y. \end{cases}$$

Nach (7a) wird

$$(25a) \quad \varphi = \Phi - \frac{1}{c} (v \mathfrak{A}) = \Phi + \frac{\vartheta}{c} (z \mathfrak{A}_y - y \mathfrak{A}_z),$$

und nach (21) ist die Lagrangesche Funktion zu berechnen. Bei Volumenladung des kugelförmigen Elektrons vom Radius ( $a$ ) werden die Differentialgleichungen für  $\mathfrak{A}_y$ ,  $\mathfrak{A}_z$  integriert durch den Ansatz

$$(25b) \quad \begin{cases} r < a & \begin{cases} \mathfrak{A}_y = -z \cdot \frac{\vartheta e}{c} \left( \frac{1}{2a} - \frac{3}{10} \cdot \frac{r^2}{a^3} \right), \\ \mathfrak{A}_z = +y \cdot \frac{\vartheta e}{c} \left( \frac{1}{2a} - \frac{3}{10} \cdot \frac{r^2}{a^3} \right). \end{cases} \\ r > a & \begin{cases} \mathfrak{A}_y = -z \cdot \frac{\vartheta e}{c} \cdot \frac{a^2}{5r^3}, \\ \mathfrak{A}_z = +y \cdot \frac{\vartheta e}{c} \cdot \frac{a^2}{5r^3}. \end{cases} \end{cases}$$

Derselbe erfüllt auch für  $r = a$  die Stetigkeitsbedingungen, die den Potentialen räumlicher Massenverteilungen vorgeschrieben sind, und verhält sich im Unendlichen so, wie es verlangt wird. Da ferner  $\mathfrak{A}_x = 0$ , und  $\Phi$  ein elektrostatisches Potential, so wird:

$$\begin{aligned} L &= - \iiint \frac{d\vartheta \varrho \varphi}{2} \\ &= - \iiint \frac{d\vartheta \varrho \Phi}{2} - \frac{\vartheta}{c} \cdot \iiint \frac{d\vartheta \varrho}{2} (z \mathfrak{A}_y - y \mathfrak{A}_z) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{e^2}{a} + \frac{\vartheta^2}{c^2} \cdot e \cdot \iiint \frac{d\vartheta \varrho}{2} (y^2 + z^2) \left( \frac{1}{2a} - \frac{3}{10} \frac{r^2}{a^3} \right). \end{aligned}$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$(25c) \quad L = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{a} + \frac{2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{e^2 a}{c^3} \cdot \vartheta^2$$

als *Lagrangesche Funktion des rotierenden Elektrons im Falle von Volumenladung*.

Im Falle der *Flächenladung* ergibt eine entsprechende Rechnung:

$$(25d) \quad L = -\frac{e^2}{2a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2 a}{c^3} \cdot \vartheta^2.$$

Die additive Konstante ist für die Dynamik unwesentlich. Der variable Teil der Lagrangeschen Funktion ist proportional dem Quadrat der Drehgeschwindigkeit, wie bei einer starren materiellen Kugel. Setzen wir

$$(25e) \quad p = \frac{4}{5 \cdot 7} e^2 a \text{ (bei Volumenladung),}$$

so ergeben die Gleichungen (22a), da  $\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$  ist,

$$(25f) \quad \mathcal{M}_x = p \vartheta_x, \quad \mathcal{M}_y = p \vartheta_y, \quad \mathcal{M}_z = p \vartheta_z \text{ oder } \mathcal{M} = p \cdot \vartheta.$$

Der Drehimpuls ist hier, wie wir bereits im § 10 erkannten, der Drehachse parallel.  $p$  gibt das „elektromagnetische Trägheitsmoment“ an. Die Gleichung (16c) ergibt:

$$(25g) \quad p = \frac{1}{3} \cdot \mu_0 a^2 \text{ bei Flächenladung.}$$

Bei *Flächenladung* hingegen erhält man:

$$(25h) \quad p = \frac{2}{3} \cdot e^2 a = \frac{1}{3} \mu_0 a^2.$$

(Bei einer mit der Masse  $M$  gleichförmig über Volumen oder Oberfläche belegten materiellen Kugel ist bekanntlich das Trägheitsmoment:

$$P = \frac{2}{5} \cdot M \cdot a^2 \text{ bez. } P = \frac{2}{3} M a^2.)$$

Für quasistationäre Rotationsbewegung gilt, nach (VIIb), die *Bewegungsgleichung*:

$$(26) \quad p \dot{\vartheta} = \Theta.$$

Rotiert etwa das Elektron im homogenen magnetischen Felde, so ist die Drehkraft durch (24a) bestimmt. Es wird:

$$(26a) \quad \dot{\vartheta} = \frac{e a^2}{c^3 p} \cdot [\vartheta \mathfrak{H}_\lambda] = \frac{1}{3} \cdot \frac{e}{c \mu_0} \cdot [\vartheta \mathfrak{H}_\lambda].$$

Der Vektor  $\dot{\vartheta}$  steht immer senkrecht auf  $\vartheta$ ; mithin bleibt der Betrag der Drehgeschwindigkeit konstant. Die Richtung der Drehachse beschreibt im Raume eine reguläre Präzessions-

bewegung um die Richtung des magnetischen Feldes.<sup>1)</sup> Die Winkelgeschwindigkeit dieser Präzession beträgt  $\frac{1}{2} \cdot \varepsilon / \mu_0 \cdot |\mathfrak{H}_h|$  (bei Flächenladung  $\varepsilon / \mu_0 \cdot |\mathfrak{H}_h|$ ), ist also durch die Kathodenstrahlkonstante  $\varepsilon / \mu_0 = 1,865 \cdot 10^7$  bestimmt. Würde man Erscheinungen kennen, bei denen diese Präzessionsbewegung sich kundgibt, so könnte man zwischen Volumen- und Flächenladung entscheiden.

Erteilt man dem rotierenden Elektron eine translatorische Bewegung, so entfernt es sich aus dem Bereiche der ausgezeichneten Bewegungen. Ist indessen die Geschwindigkeit  $q$ , bez. die Drehgeschwindigkeit  $\vartheta$  so gering, daß  $\beta^2$  und  $\beta \cdot a \vartheta / c$  gegen 1 zu vernachlässigen sind, so zerfällt, den Differentialgleichungen (19) bis (19c) zufolge, das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  in zwei Teile; der eine Teilvektor hängt linear von  $q$ , der andere linear von  $\vartheta$  ab. Das Gleiche gilt mithin von der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$ ; die elektrische aber ist bei so langsamer Bewegung als konstant zu betrachten. Folglich zerfällt auch der Poyntingsche Vektor, und somit auch der Impuls  $\mathfrak{G}$  und der Drehimpuls  $\mathfrak{M}$  in je zwei derartige Vektoren. Die in  $q$  linearen Teile werden erhalten, indem man  $\vartheta = 0$  setzt, hier fanden wir  $\mathfrak{G} = \mu_0 q$ ,  $\mathfrak{M} = 0$ . Die in  $\vartheta$  linearen Teile erhält man, indem man  $q = 0$  setzt; sie betragen  $\mathfrak{G} = 0$ ,  $\mathfrak{M} = p \vartheta$ . Daher wird auch bei gleichzeitiger Translation und Rotation zu setzen sein

$$(27) \quad \mathfrak{G} = \mu_0 q, \quad \mathfrak{M} = p \vartheta,$$

falls  $\beta^2$ ,  $\beta \cdot \vartheta a / c$  gegen 1 zu vernachlässigen sind.

Wir berechnen jetzt die Drehgeschwindigkeit, die dem langsam bewegten Elektron in einem inhomogenen Felde erteilt wird, und zwar in dem speziellen Falle, der zu dem Ausdrücke (24b) der äußeren Drehkraft führte. Die Bewegungsgleichungen lauten hier

$$(27a) \quad \mu_0 \frac{dq_y}{dt} = e F_0, \quad p \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{e a^2}{5} \cdot F_0'.$$

Ist  $q$  die ursprünglich vorhandene, der  $x$ -Achse parallele Geschwindigkeit der im Kathodenstrahle bewegten Elektronen, und wächst die vom äußeren Felde herrührende Kraft  $F$  vom

1) Vgl. W. Voigt, Gött. Nachr. 1902; Ann. d. Phys. 9. p. 115. 1902, Gleichung 56—58. Dort wird das Trägheitsmoment des Elektrons noch nicht elektromagnetisch gedeutet.

Werte 0 für  $x=x_0$  bis zum Werte  $F_1$  für  $x=x_1$  an, so ist, bei geringer Bahnkrümmung, die in  $x_1$  erreichte seitliche Geschwindigkeit

$$(27b) \quad q_y = \frac{e}{\mu_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} F_0 \cdot dt = \frac{e}{\mu_0} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{F_0 dx}{q} = \frac{e}{\mu_0} \cdot \bar{F} \cdot \frac{(x_1 - x_0)}{q},$$

wo  $\bar{F}$  den Mittelwert der Kraft anzeigt.

Die erreichte Drehgeschwindigkeit hingegen ist:

$$(27c) \quad \vartheta_z = \frac{e a^2}{5 p} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{F_0' dx}{q} = \frac{7}{5} \cdot \frac{e}{\mu_0} \cdot \frac{F_1}{q}.$$

Wir berechnen den Quotienten der Energien der rotatorischen und der seitlichen translatorischen Bewegung, die in dem inhomogenen Felde entstanden sind. Er beträgt nach (25g)

$$(27d) \quad \frac{p \vartheta_z^2}{\mu_0 q_y^2} = \frac{1}{7} \left( \frac{a \vartheta_z}{q_y} \right)^2 = \frac{7}{25} \cdot \left( \frac{F_1}{\bar{F}} \cdot \frac{a}{x_1 - x_0} \right)^2.$$

Nehmen wir nun an, daß das äußere Feld auf einer Strecke  $x_1 - x_0 = 0,1$  cm vom Wert Null bis zu seinem endgültigen konstanten Werte anwächst, und setzen  $\bar{F} = \frac{1}{2} F_1$ , so beträgt der Quotient doch nur  $p \vartheta_z^2 / \mu_0 q_y^2 = 10^{-24}$  bis  $10^{-22}$ . Wir schließen: selbst in so inhomogenen Feldern verschwindet die Energie der entstandenen Drehbewegung durchaus gegen die der fortschreitenden Bewegung, wenigstens bei langsamen Kathodenstrahlen. Die Annahme übrigens, die der Gleichung (27) zu Grunde lag, daß  $\beta \cdot \vartheta a/c$  klein gegen 1 sein soll, ist hier sicher erfüllt; denn  $\vartheta a/q = \vartheta a/c \beta$  ist bereits klein gegen 1; ist also  $\beta^2$  klein, so ist  $\beta \cdot \vartheta a/c$  noch weit kleiner.

Bei raschen Elektronenbewegungen, wo in den Differentialgleichungen (19) bis (19c) der Faktor  $(1 - \beta^2)$  berücksichtigt werden muß, ist es weit schwerer, den Einfluß drehender Kräfte zu untersuchen. Drehbewegung um die Translationsrichtung allerdings kann man auf Grund der Ansätze des § 10 behandeln; ich habe die Lagrangesche Funktion einer solchen Bewegung berechnet, unterlasse indessen die Mitteilung des Resultates, da das Problem ein gar zu spezielles ist. Ausserordentlich starke Rotationen können allerdings unter Umständen bei Becquerelstrahlen den Charakter der freien Bewegung des Elektrons, wie auch insbesondere denjenigen

der magnetisch abgelenkten in sehr komplizierter Weise beeinflussen; doch zwingt bisher nichts dazu, solche Rotationen als vorhanden anzunehmen. Vielmehr befindet sich diejenige Theorie, welche die Drehbewegungen als unwesentlich für die Dynamik des Elektrons betrachtet, im Einklange mit dem Experimente.

#### § 12. Stabilität translatorischer Bewegung.

Im sechsten Abschnitte wurde bewiesen, daß zur Erhaltung gleichförmiger Translationsbewegung einer beliebig verteilten Ladung im allgemeinen eine äußere Drehkraft

$$(28) \quad \Theta = [q \mathfrak{G}]$$

erforderlich ist. Nur wenn der Impuls  $\mathfrak{G}$  der Richtung der Geschwindigkeit parallel weist, ist kräftefreie stationäre Bewegung möglich. Die Formeln (22) des § 10 gestatten es, die Bedingung der kräftefreien stationären Bewegung in der Form zu schreiben

$$(28a) \quad q_x : q_y : q_z = \frac{\partial L}{\partial q_x} : \frac{\partial L}{\partial q_y} : \frac{\partial L}{\partial q_z}.$$

Wir bezeichnen mit  $q_x, q_y, q_z$  die Komponenten der Geschwindigkeit, bezogen auf ein in der elektrischen Ladung festes Achsenkreuz. Ist die Lagrangesche Funktion für Bewegung in einer beliebigen Richtung bekannt, so bestimmen die Gleichung (28a) diejenigen Richtungen, denen parallel eine kräftefreie Translation möglich ist; wir wissen bereits aus § 6, daß für ein homogen geladenes Ellipsoid die drei Hauptachsen diese Bedingung erfüllen. Es entsteht nun aber die Frage, welche dieser möglichen Translationsbewegungen stabil sind. Wir geben zunächst ein Kriterium für die Stabilität der Translationsbewegung einer beliebig verteilten Ladung, und machen alsdann die Anwendung auf das Ellipsoid.

Die Lage der auf ihre Stabilität hin zu prüfenden Richtung markieren wir in der bewegten Ladung, und wählen sie als  $x$ -Achse. Die Bedingungen (28a) müssen jedenfalls erfüllt sein sie ergeben:

$$(28b) \quad \frac{\partial L}{\partial q_y} = \frac{\partial L}{\partial q_z} = 0 \quad \text{für} \quad q_y = q_z = 0, \quad q_x = q.$$

Der Betrag des Impulses ist:

$$(28c) \quad G = \left( \frac{\partial L}{\partial q_x} \right)_{q_y = q_z = 0}.$$



Wir denken uns nun die Bewegungsrichtung abgeändert; die Ebene, in der die Ablenkung erfolgt, wählen wir als *xy*-Ebene; es ist also jetzt  $q_y \geq 0$ . Zur Aufrechterhaltung der so abgeänderten Bewegung ist eine äußere Drehkraft erforderlich, deren *z*-Komponente ist

$$\Theta_z = q_x \Theta_y - q_y \Theta_x = q_x \frac{\partial L}{\partial q_y} - q_y \frac{\partial L}{\partial q_x}.$$

Die entsprechende Komponente der „inneren Drehkraft“, die jener das Gleichgewicht hält, ist demnach:

$$(28d) \quad -\Theta_z = q_y \frac{\partial L}{\partial q_x} - q_x \frac{\partial L}{\partial q_y}.$$

Wir nennen nun die ursprüngliche Bewegung eine stabile, wenn diese durch Abänderung der Bewegungsrichtung erweckte innere Drehkraft stets dahin strebt, die in der Ladung feste *x*-Achse in die neue Bewegungsrichtung einzustellen. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn für  $q_y \geq 0$ ,  $(-\Theta_z) \geq 0$  ist.

Wir entwickeln die rechte Seite von (28d) in eine nach Potenzen von  $q_y$  fortschreitende Reihe. Das Anfangsglied ist Null nach (28b). Das in  $q_y$  lineare Glied beträgt:

$$q_y \left\{ G - q \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_y^2} \right)_{q_y = q_x = 0} \right\}.$$

Mithin ist das Stabilitätskriterium für kleine Abänderungen der Bewegungsrichtung zu formulieren durch:

$$(28e) \quad \frac{G}{q} - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_y^2} \right)_{q_y = q_x = 0} > 0$$

bei beliebiger Lage der zur Bewegungsrichtung senkrechten *y*-Achse.

Wir entwickeln andererseits die Lagrangesche Funktion in eine Taylorsche Reihe, die nach Potenzen von  $q_y$  fortschreitet, wir schreiben  $L_0$  den Wert der Funktion für  $q_x = q$ ,  $q_y = q_x = 0$ . Wir wollen ferner die Abänderung der Bewegung in der Weise vollzogen denken, daß der Betrag der Geschwindigkeit  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$  konstant bleibt, mithin

$$q_x = \sqrt{q^2 - q_y^2} = q - \frac{1}{2} \frac{q_y^2}{q}$$

setzen. Dann wird

$$L = L_0 + \left( \frac{\partial L}{\partial q_x} \right)_{q_y = 0} (q_x - q) + \left( \frac{\partial L}{\partial q_y} \right)_{q_y = 0} \cdot q_y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_y^2} \right)_{q_y = 0} \cdot q_y^2,$$

wenn Glieder dritter Ordnung in  $q_y$  nicht berücksichtigt werden. Nach (28b), (28c) wird alsdann

$$(28f) \quad L = L_0 - \frac{1}{2} q_y^2 \left\{ \frac{G}{q} - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_y^2} \right)_{q_y = q_z = 0} \right\}.$$

Das Stabilitätskriterium (28e) ist mithin dann und nur dann erfüllt, wenn kleine Abänderungen der Bewegungsrichtung bei konstant gehaltenem Betrage der Geschwindigkeit stets die Lagrangesche Funktion verkleinern. Es folgt:

*Die Translationsbewegung einer beliebig verteilten Ladung ist stabil, wenn die Lagrangesche Funktion für die betreffende Richtung ein Maximum besitzt, bei konstantem Betrage der Geschwindigkeit.*

Auf solche stabile Bewegungen ist nicht nur die Formel (16a) für die longitudinale Masse, sondern auch die Formel (16b) für die transversale Masse anzuwenden. Denn wenn auch keine wirkliche Einstellung der in der Ladung festen  $x$ -Achse in die abgeänderte Impulsrichtung bez. Bewegungsrichtung erfolgen wird, sondern eher ein Oszillieren um dieselbe, so werden doch im Grenzfall hinreichend kleiner Bahnkrümmungen die Richtungen des Impulsvektors und des Geschwindigkeitsvektors keine merklichen Abweichungen aufweisen, mithin die Voraussetzungen zutreffen, auf denen die Formel (16b) beruhte.

Wir berechnen die *Lagrangesche Funktion des homogen über sein Volumen geladenen Ellipsoides für eine beliebige Bewegungsrichtung*: Wir legen wieder die  $x$ -Achse in die Bewegungsrichtung, die jetzt eine beliebige Lage im Ellipsoid haben soll. Die Gleichung (14) des § 7 ergibt für die Lagrangesche Funktion den Ausdruck:

$$(29) \quad L = -\sqrt{1-\beta^2} \cdot W'_e.$$

Dabei bedeutet  $W'_e$  die elektrostatische Energie derjenigen Verteilung der Ladung  $e$ , die entsteht, wenn das Ellipsoid einer Streckung parallel der  $x$ -Achse im Verhältnis  $(1:\sqrt{1-\beta^2})$  unterworfen wird.

Durch diese Streckung entsteht wieder ein Ellipsoid, mit den Achsen  $a'b'c'$ . Die elektrostatische Energie eines solchen beträgt <sup>1)</sup>:

1) Vgl. E. Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie, p. 134. 1885.

$$(29a) \quad \begin{cases} W'_e = \frac{1}{16} \cdot e^2 \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D(s; a', b', c')}, \\ D(s; a', b', c') = \sqrt{(a'^2 + s)(b'^2 + s)(c'^2 + s)}. \end{cases}$$

Es kommt nun darauf an, diejenige Richtung im ursprünglichen Ellipsoid (mit den Halbachsen  $a, b, c$ ) zu finden, der parallel die Streckung ausgeführt werden muß, um die elektrostatische Energie des gestreckten Ellipsoids zu einem Minimum zu machen.

Da die  $x$ -Achse im allgemeinen schief zu den Hauptachsen des Ellipsoides liegt, so schreiben wir seine Gleichung:

$$(29b) \quad \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot z^2 + 2\delta \cdot yz + 2\epsilon xz + 2\zeta xy = 1.$$

Die ganze Funktion dritten Grades von  $s$ , die gleich Null gesetzt die negativen Halbachsenquadrate  $-a^2, -b^2, -c^2$  als Wurzeln ergibt, und die demgemäß bei Coordinatentransformationen invariant bleibt, ist

$$(29c) \quad g_3(s; a, b, c) \equiv \begin{vmatrix} s\alpha + 1 & s\zeta & s\epsilon \\ s\zeta & s\beta + 1 & s\delta \\ s\epsilon & s\delta & s\gamma + 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{s}{a^2} + 1\right) \left(\frac{s}{b^2} + 1\right) \left(\frac{s}{c^2} + 1\right).$$

Es besteht mithin die Identität

$$(29d) \quad D^2(s; a, b, c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot g_3(s; a, b, c).$$

Die Gleichung des gestreckten Ellipsoides sei

$$(29e) \quad \alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \gamma' z'^2 + 2\delta' y'z' + 2\epsilon' x'z' + 2\zeta' x'y' = 1.$$

Da durch die Substitution

$$(29f) \quad x = x' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = x' \lambda, \quad y = y', \quad z = z',$$

(29b) in (29e) übergehen soll, so ist zu setzen:

$$(29g) \quad \alpha' = \alpha \lambda^2, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \delta' = \delta, \quad \epsilon' = \epsilon \lambda, \quad \zeta' = \zeta \lambda,$$

folglich

$$(29h) \quad g_3(s; a', b', c') \equiv \begin{vmatrix} s\alpha' + 1 & s\zeta' & s\epsilon' \\ s\zeta' & s\beta' + 1 & s\delta' \\ s\epsilon' & s\delta' & s\gamma' + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s\alpha + \frac{1}{\lambda^2} & s\zeta & s\epsilon \\ s\zeta & s\beta + 1 & s\delta \\ s\epsilon & s\delta & s\gamma + 1 \end{vmatrix} \cdot \lambda^2.$$

Der Identität (29d) entspricht hier folgende:

$$(29i) \quad D^2(s; a', b', c') = a'^2 \cdot b'^2 \cdot c'^2 \cdot g_3(s; a', b', c').$$

Da ferner, mit Rücksicht auf die vorgenommene Streckung, die Volumina der beiden Ellipsoide sich verhalten wie

$$a' \cdot b' \cdot c' : a \cdot b \cdot c = 1 : \lambda,$$

so folgt:

$$(30) \quad D^2(s; a' b' c') = a^2 b^2 c^2 \cdot \begin{vmatrix} s\alpha + \frac{1}{\lambda^2} & s\zeta & s\varepsilon \\ s\zeta & s\beta + 1 & s\delta \\ s\varepsilon & s\delta & s\gamma + 1 \end{vmatrix}.$$

und mit Rücksicht auf (29c), (29d):

$$(30a) \quad D^2(s; a', b', c') = a^2 b^2 c^2 \cdot \left\{ g_3(s; a, b, c) + \left( \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \cdot \begin{vmatrix} s\beta + 1 & s\delta \\ s\delta & s\gamma + 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Die Gleichung des zur  $x$ -Achse senkrechten Durchschnittes durch das ursprüngliche Ellipsoid wird erhalten, indem in (29b)  $x = 0$  gesetzt wird:

$$(30b) \quad \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz = 1.$$

Wir nennen  $h_1, h_2$  die beiden Halbachsen dieses Durchschnittes. Dann ist

$$(30c) \quad g_3(s; h_1, h_2) = \begin{vmatrix} s\beta + 1 & s\delta \\ s\delta & s\gamma + 1 \end{vmatrix} = \left( \frac{s}{h_1^2} + 1 \right) \cdot \left( \frac{s}{h_2^2} + 1 \right) = \frac{s^2}{h_1^2 \cdot h_2^2} + s \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + 1.$$

Die soeben berechnete Funktion zweiten Grades von  $s$  allein ist es, die auf der rechten Seite von (30a) die Abhängigkeit von der Lage der  $x$ -Achse bekundet; sie ist multipliziert mit einem von dem konstanten Streckungsverhältnis  $1:\lambda$  abhängigen, stets positiven Faktor. Für ein gegebenes, positives  $s$  wird mithin  $D(s; a', b', c')$  sicher dann den größten Wert annehmen, wenn für die betreffende Lage der  $x$ -Achse sowohl  $1/h_1^2 h_2^2$ , als auch  $(1/h_1^2 + 1/h_2^2)$  ihre größten Werte besitzen. Das ist nun in der Tat der Fall; denn  $(h_1, h_2)$  ist proportional dem Flächeninhalt der Ellipse (30b), und dieser ist bekanntlich am kleinsten, wenn die  $(yz)$ -Ebene durch die beiden kleinsten Halbachsen des Ellipsoides gelegt wird; ferner folgt aus der für je drei senkrechte Halbmesser des Ellipsoides gültigen Relation

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} = \text{Konstans},$$

daß  $1/h_1^2 + 1/h_2^2$  sein Maximum erreicht, wenn die  $x$ -Achse mit der großen Halbachse des Ellipsoids zusammenfällt. Legt

man also die  $x$ -Achse durch die große Halbachse, so nimmt, für ein beliebiges positives  $s$ ,  $D(s; a', b', c')$  seinen größten Wert an.

Aus (29a) folgt: Bei Streckung parallel der großen Achse wird die elektrostatische Energie  $W'_e$  des gestreckten Ellipsoides ein absolutes Minimum. Gleichung (29) besagt jetzt: Die Lagrangesche Funktion wird für Bewegung parallel der großen Achse ein absolutes Maximum bei konstanter Geschwindigkeit. Mit Rücksicht auf den oben bewiesenen Satz folgt hieraus:

Für das mit homogener Volumenladung erfüllte Ellipsoid ist die Bewegung parallel der großen Achse stabil.

Dieses Resultat kann von Wichtigkeit werden, wenn man gezwungen sein sollte, etwa bei dem positiven Elektron die Annahme allseitiger Symmetrie aufzugeben. Geht man dann etwa zu Rotationsellipsoiden über, die parallel der Rotationsachse fortschreiten, so dürfen das nur verlängerte, nicht abgeplattete Rotationsellipsoide sein. Bei letzteren wäre die Bewegung instabil.

Wiesbaden, im Oktober 1902.

(Eingegangen 23. Oktober 1902.)

### 5. Über leuchtenden elektrischen Wind; von E. Warburg.

§ 1. An einer Influenzmaschine unterscheidet man leicht die positiven von den negativen Spitzenkämmen durch die auftretenden Lichterscheinungen, indem von den positiven Kämmen lange Büschel ausgehen, während an den negativen sehr kleine helle, von dunklen Räumen umgebene Sterne sich zeigen. Man erkennt in diesen Erscheinungen den bekannten polaren Unterschied wieder, welchen Anode und Kathode in den luftverdünnten Räumen Geißlerscher Röhren zeigen. In der Tat ist der leuchtende Stern an den negativen Spitzenkämmen nichts anderes, als das negative Glimmlicht der Geißlerschen Röhren, welches bei dem großen atmosphärischen Luftdruck und der kleinen Stromstärke in einen winzigen Raum sich zusammenzieht.

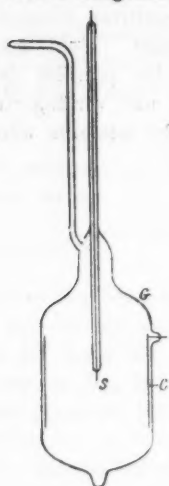


Fig. 1.  
 $\frac{1}{2}$  nat. GröÙe.

§ 2. Etwas anders und der vorgetragenen Auffassung auf den ersten Blick widersprechend ist die Lichterscheinung an negativen Spitzen in trockenem Stickstoff, welcher unter dem atmosphärischen Druck steht und durch glühendes Kupfer von Sauerstoff befreit ist. Die zu den Versuchen benutzten Apparate sind nach Einrichtung und Füllung in § 10 meiner dritten Mitteilung beschrieben.<sup>1)</sup> Die Spitze S befand sich (Fig. 1) in der Achse des zur Erde abgeleiteten Platinzylinders C, das Ganze in dem Glasgefäß G. Durch einen Hochspannungsakkumulator erhält man, wie dort gezeigt, bei dem erzielten Grade der Sauerstofffreiheit bei einem Spitzenpotential von

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 2. p. 306. 1900.

—2500 Volt verhältnismäßig starke Ströme von ungefähr 0,5 Milliampere, wobei an der Spitze der § 1 beschriebene helle Stern sich zeigt. Doch bemerkt man bei aufmerksamer Beobachtung, daß von diesem Stern ein feiner Lichtpinsel ausgeht, welcher, wenn um die Achse des Apparates alles symmetrisch ist, in der Richtung dieser Achse verläuft, zeitweise ruhig stehend, zuweilen kaum wahrnehmbar oscillierend. Die Erscheinung erinnert etwas an einen positiven Büschel. Doch liegt ein ganz anderes Gebilde vor.

§ 3. An den Zylinder wurde (Fig. 2) ein engeres Rohr  $AB$ <sup>1)</sup> angesetzt. Im verdunkelten Zimmer sah man alsdann, wie der Lichtpinsel in das Rohr  $AB$  hineinlief, wobei er sich von der Spitze an, wo er als feine leuchtende Linie erschien, mehr und mehr verbreiterte und bis auf eine Entfernung von 7,5 cm von der Spitze sichtbar blieb. Die in § 2 erwähnten Oscillationen des Pinsels, welche in der Nähe der Spitze nur klein sind, treten in  $AB$  in vergrößertem Maßstabe auf, wobei der Pinsel eine wellenförmige Gestalt annimmt. Man hat den Eindruck, als ob aus einem Rohr, das man ein wenig hin- und herbewegt, ein mit Rauch imprägnierter Gasstrahl austräte.

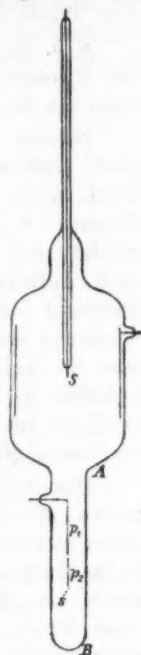


Fig. 2.

§ 4. Unter dem zur Erde abgeleiteten Zylinder, in einer Entfernung von 2,2 cm von seinem unteren Rand ist (Fig. 3) ein kreisrundes Drahtnetz  $N$  aus Platin von 3 cm Durchmesser angebracht, 0,6 cm darunter eine ebensogroße Platinplatte  $P$ .  $\frac{1}{3}$  nat. Grösse. Im verdunkelten Zimmer sieht man erstens, daß der Lichtpinsel das auch zur Erde abgeleitete Drahtnetz  $N$  durchdringt. Ferner war die Spitze unabsichtlich nicht genau nach der Achse des Rohres gerichtet, was zur Folge hatte, dass der Lichtpinsel etwas schief gegen die Achse gerichtet war. Beim Hin- und Heroszillieren des Lichtpinsels geschah es nun zu-

1) Die Platindrähte  $p_1$  und  $p_2$  (vgl. § 9) sind hierbei überflüssig. In den Figg. 2—4 ist das zur Füllung dienende Rohr weggelassen.

weilen, daß er an dem Netze *N* und an der Platte *P* vorbeiging; dann sah man, dass eine leuchtende Wolke fortgeschleudert wurde und an den Wänden des Rohres in der Richtung des Pfeiles bei *f* entlang floß.

Nach diesen Versuchen ist es kein Zweifel, daß man in dem Pinsel leuchtenden elektrischen Wind vor sich hat.

§ 5. Im Dunkeln sieht man, daß das Gas nach Öffnen des Stromes nachleuchtet; die Dauer dieses Nachleuchtens kann bis zu zwei Sekunden betragen.

Solches Nachleuchten wird gewöhnlich direkt,<sup>1)</sup> d. h. nach Oeffnung des Stromes, bei atmosphärischem Luftdruck nicht bemerkt, sondern meist nur in gasverdünnten Räumen, z. B. in Geißlerschen Röhren. Ich habe früher gezeigt, daß das Nachleuchten eine Begleiterscheinung einer nach Aufhören des Stromes eintretenden chemischen Veränderung des Gasinhaltes darstellt, nicht eine Begleiterscheinung einer elektrischen Entladung. In der Tat, öffnet man ein Geißlersches Rohr, dessen Inhalt im Nachleuchten begriffen ist, an dem einen Ende gegen die Atmosphäre, so erscheint am anderen Ende ein heller Lichtblitz, indem die leuchtende Materie zusammengepreßt wird.<sup>2)</sup>

Demnach ist die Entstehung des Lichtpinsels folgendermaßen zu erklären. Das an der Spitze gleichnamig mit dieser elektrisierte Gas wird durch die elektrische Kraft an der Spitze fortgetrieben (elektrischer Wind); es hat an der Spitze durch den Strom eine chemische Veränderung erlitten und diese bildet sich auf dem Wege des fortgetriebenen Gases unter Nachleuchten zurück; so bleibt das fortgetriebene Gas oder der elektrische Wind auf seinem Wege durch ein Phänomen des Nachleuchtens eine Zeitlang sichtbar.

§ 6. Es fragt sich, ob der leuchtende elektrische Wind eine nachweisbare Elektrizitätsmenge mit sich führt.

1) Die von Heinr. Hertz beobachteten, die Flaschenentladung begleitenden Strahlen werden auch durch Nachleuchten sichtbar; diese Strahlen treten nach Hertz auch in Gasen von Atmosphärendruck in die Erscheinung, allerdings sind sie hier nur einige Millimeter lang und sehr unscheinbar. (H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 84. 1883.)

2) E. Warburg, Arch. sc. phys. 12. p. 504. 1884.



Um dies zu prüfen wurden zunächst in dem Apparate Fig. 3 nacheinander der Zylinder *C*, das Netz *N*, auf welchem der Pinsel spielte, und die Platte *P*, welche er nach Durchdringung des Netzes traf, über das Galvanometer zur Erde abgeleitet, wobei die übrigen Metallteile jedesmal direkt zur Erde abgeleitet waren. Bei einem Spitzenpotential von  $-3080$  Volt ergaben sich die von *C*, *N* und *P* aufgenommenen Ströme bez. gleich 705; 25;  $1,13 \cdot 10^{-6}$  Amp. Ob der Pinsel

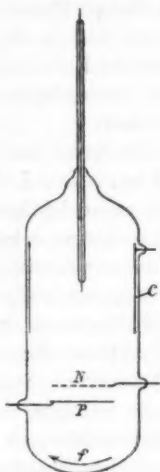


Fig. 3.

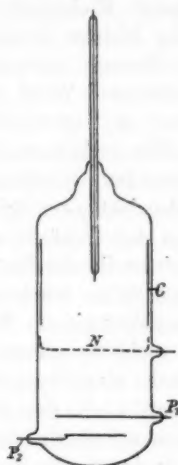
 $\frac{1}{3}$  nat. Grösse.

Fig. 4.

 $\frac{1}{3}$  nat. Grösse.

überhaupt eine nachweisbare Elektrizitätsmenge mit sich führt, kann nach diesen Angaben nicht entschieden werden, jedenfalls ist dieselbe kleiner als

$$\frac{26,13}{705} = 3,7 \text{ Proc.}$$

des ganzen von der Spitze ausgehenden Stromes.

In dem Apparat Fig. 4 schließt das Platinnetz *N* an die Zylinderwand an. *P*<sub>1</sub> und *P*<sub>2</sub> sind bez. ein Platindraht und eine Platinplatte. Der Lichtpinsel tritt durch das Netz hindurch und ist etwa 2 cm hinter diesem als weiße Wolke sichtbar, zuweilen scheint er die Platinplatte zu erreichen.

Bei einem Spitzenpotential von  $-3000$  Volt betrug der Strom von der Spitze zum Zylinder  $750$ , zum Netz  $5,22 \cdot 10^{-6}$  Amp. Wurden  $C$  und  $N$  direkt,  $P_1$  und  $P_2$  zusammen über das Galvanometer zur Erde abgeleitet, so zeigte das ohne Nebenschluß gebrauchte Galvanometer, in welchem ein Skalenteil  $1,5 \cdot 10^{-9}$  Amp. entsprach, in einem Fall gar keinen Strom, in einem anderen Fall einen von  $3$  Skt. oder  $0,0045 \cdot 10^{-6}$  Amp. an.

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß der Pinsel, wenn er überhaupt Elektrizität führt, eine Menge fördert, welche einen sehr kleinen Bruchteil des ganzen von der Spitze ausgehenden Stromes beträgt. Die elektrische Konvektion durch den elektrischen Wind ist also eine geringfügige Begleiterscheinung des eigentlichen Spitzenstromes.

§ 7. Wie verhält es sich nun mit der Natur der im Pinsel nachleuchtenden Substanz? Das Spektrum des Lichtpinsels wird in der Nähe der Spitze durch ein geradsichtiges Prisma leicht und mit Schärfe als ein Linienspektrum erkannt, und zwar als eine teilweise Fortsetzung des Linienspektrums, welches der an der Spitze leuchtende Stern liefert; von einigen Linien des Sternspektrums im Blau war die Fortsetzung im Pinselspektrum nicht zu erkennen. In dem Apparat Fig. 2 konnte man mittels eines vor das Rohr  $AB$  gesetzten Spaltes feststellen, daß auch das breite Band, zu welchem der Pinsel in  $AB$  sich erweiterte, dasselbe Linienspektrum gab.

Das Spektrum des Sternes wurde mit dem Spektralapparat aufgenommen, wobei Hr. Dr. Martens mir behülflich war; es wurde die Anwesenheit der Linien  $471$ ,  $460$ ,  $449$ ,  $428$ ,  $420 \mu\mu$  konstatiert, welche Ångström und Thalén an der Kathode in verdünntem Stickstoff beobachtet haben; außerdem noch einige andere Linien, z. B.  $435$ ,  $407$ ,  $403$ . Diese drei Linien finden sich übrigens auch an der Kathode des Rohres vor, in welchem ich das Kathodengefälle des von Sauerstoff befreiten Stickstoffs bestimmt habe und in welchem Natrium zugegen ist.<sup>1)</sup>

§ 8. Gleichwohl ist der stark entwickelte Lichtpinsel (§ 3) und das nach Stromöffnung beobachtete Nachleuchten (§ 5) nicht dem reinen Stickstoff zuzuschreiben.

Zunächst zeigte es sich, daß der Lichtpinsel in verschie-

1) E. Warburg, Wied. Ann. 40. p. 9. 1890.

denen Apparaten in sehr verschiedener Stärke sich entwickelte. Zuweilen war er gleich nach dem Abschmelzen der Apparate unscheinbar, nahm aber mit der Zeit zu, wahrscheinlich infolge von verunreinigenden Gasen, die aus den Wänden oder den Elektroden frei wurden.

Das Nachleuchten zeigt den Charakter der Phosphoreszenz und man weiß, daß Phosphoreszenz in reinen Substanzen, wenn überhaupt, jedenfalls nur schwach auftritt.

Bei der Glimmentladung tritt starkes Nachleuchten in schwach verunreinigtem Sauerstoff auf, in welchem es ein kontinuierliches Spektrum zeigt. Doch zeigt das Nachleuchten in atmosphärischer Luft nach J. J. Thomson ein Linienpektrum.<sup>1)</sup>

Bei der Spitzenentladung in Wasserstoff von atmosphärischem Druck konnte in den beschriebenen Apparaten weder ein Lichtpinsel noch Nachleuchten nach Öffnen des Stromes beobachtet werden; auch bei der Glimmentladung in verdünntem Wasserstoff wird letzteres nicht bemerkt.

§ 9. Auf Grund dieser Tatsachen war zu vermuten, daß das Auftreten des Lichtpinsels und des mit demselben zusammenhängenden Nachleuchtens nach Stromöffnung trotz der Reinigung des Stickstoffs durch glühendes Kupfer an die Gegenwart einer Spur von Sauerstoff gebunden sei. Um diese Vermutung zu prüfen, habe ich versucht, durch Einwirkung von metallischem Natrium einen höheren Grad der Sauerstofffreiheit zu erzielen. Dasselbe läßt sich in völlig reinem Zustand durch den früher von mir zu demselben Zwecke benutzten elektrolytischen Proceß in die Apparate einführen.<sup>2)</sup> Die Methode kann hier, wo das Gas nicht, wie bei den älteren Versuchen, unter dem Drucke von einigen Millimetern Quecksilber, sondern unter dem vollen Atmosphärendruck steht, folgendermaßen angewandt werden. In den Fortsatz *AB* (Fig. 2) schmilzt man einen 0,5 mm dicken Platindraht  $p_1$  ein, an welchen ein 0,25 mm dicker Platindraht  $p_2$  angeschweißt ist; an diesen ist in der Gebläselampe eine Spitze *S* angezogen worden. Bringt man nun *AB* in Natriumamalgam, welches man auf 200—220° erhitzt, und leitet den Strom des

1) J. J. Thomson, *Phil. Mag.* (5) **32**. p. 335. 1891.

2) E. Warburg, *Wied. Ann.* **40**. p. 1. 1890.

Hochspannungsakkumulators von dem Natriumamalgam durch das Glas zur Spitze, so schiebt man von außen nach innen Natrium durch das Glas hindurch, welches auf der Innenseite des letzteren in Form von weiß glänzenden Kügelchen zum Vorschein kommt. Bei  $200-220^{\circ}$  wurden so mittels 2280 Elementen unter Einschaltung von Jodkadmiumwiderständen Ströme von 1–2,5 Milliamp. erhalten, wobei die Potentialdifferenz zwischen Spitze und Natriumamalgam 2200–2900 Volt betrug. Die Milliampere Stunde liefert 0,86 mg Natrium.

In den Apparat Fig. 2 wurden nun durch 6 stündige Anwendung eines Stromes von 2,25 Milliampere 11,6 mg Natrium eingeführt, wobei das Licht an der Spitze *S* die Natriumlinie sehr hell zeigte. Der Lichtpinsel, welcher von der Spitze *S* ausging, wenn der Strom vom Platinzylinder *P* zur Spitze *S* geleitet wurde, war hierdurch weder an Helligkeit noch an Länge reduziert worden; er erstreckte sich tief in das Rohr *AB* hinein, und auch das Nachleuchten nach Öffnen des Stromes trat ein.

Nunmehr wurde der untere, Natrium enthaltende Teil *AB* in einem Thermostaten 9 Stunden lang auf  $320^{\circ}$  erhitzt und dadurch infolge der auftretenden Wärmekonvektionsströme das Gas mit dem hoch erhitzten Natriummetall behandelt. Dies hatte zur Folge, daß nach Abkühlung auf Zimmertemperatur der Lichtpinsel nur auf etwa 2 cm von der Spitze sichtbar blieb und das Nachleuchten nach Stromöffnung fortfiel.

Diese Behandlung wurde noch einmal 4 Stunden lang wiederholt; es trat eine weitere Schwächung des Lichtpinsels ein, aber ganz zum Verschwinden kam er nicht.

Nach diesen Versuchen rührt das Nachleuchten nach Stromöffnung und der stark entwickelte Lichtpinsel von der Gegenwart einer Spur Sauerstoffs her. Da es nach thermodynamischen Prinzipien unmöglich ist, durch irgend ein Reduktionsmittel den Sauerstoff völlig zu entfernen, so liegt kein Grund vor, den nach der Behandlung mit heißem Natrium übrig gebliebenen kleinen Rest des Lichtpinsels dem reinen Stickstoff zuzuschreiben. Welches das chemische Produkt ist, das, durch den Strom gebildet und folgeweise der Wirkung des Stromes entzogen, unter Lichtentwicklung sich zurückbildet, kann nicht angegeben werden.

§ 10. Während der Apparat in Gegenwart von Natrium im Thermostaten erhitzt wurde, beobachtete man folgendes:

1. Der Strom an der Spitze *S* zeigte die Natriumlinie sehr hell.

2. Zuweilen schoß ein 1—2 cm langer, goldgelber, sehr heller Lichtpinsel aus dem Stern hervor und blieb einige Zeit lang bestehen; im Spektrum dieses Pinsels konnte mit Sicherheit nur die Natriumlinie beobachtet werden. Es ist möglich, daß das Nachleuchten im Lichtpinsel hier von der Bildung oder dem Zerfall einer Natrium-Stickstoffverbindung herrührt.

3. Die Stromstärke vom Platinzylinder nach *S* war größer während der Erwärmung als nach der Abkühlung, was wohl von der Gegenwart gut leitenden Natriumdampfes an der Spitze herrührt. Z. B. war die Stromstärke bei der Temperatur  $300^{\circ}$  von *AB* 1,47, als der Apparat Zimmertemperatur hatte 1,19 Milliampere, wobei in beiden Fällen das Spitzenpotential – 1470 Volt betrug.

§ 11. Bei höherem Sauerstoffgehalt — wenn der Stickstoff nicht mit glühendem Kupfer behandelt wird — ist von dem Pinsel nichts zu bemerken. Da er nach der Sauerstoffentziehung durch Natrium sehr schwach ist, so müssen bei einer gewissen sehr kleinen Sauerstoffbeimengung die Bedingungen für seine Entstehung am günstigsten sein, sowie auch ein gewisser kleiner Wert einer fremden Beimengung (z. B. Wismutsalz) zum Schwefelcalcium die stärkste Phosphoreszenz desselben hervorbringt.<sup>1)</sup>

Vermehrter Sauerstoffgehalt wirkt jedenfalls schädlich dadurch, daß er das Zustandekommen starker Ströme hindert; ob dieselbe Stromstärke bei kleinerem Sauerstoffgehalt die Erscheinung hervorbringt, bei größerem nicht, konnte ich nicht mit voller Sicherheit entscheiden.

§ 12. Während nach früheren Ermittlungen<sup>2)</sup> Sauerstoffentziehung durch glühendes Kupfer in Stickstoff das negative Minimumpotential erheblich herabsetzt, die Stromstärke bei negativer Spitze erheblich vergrößert, hat die weitere Sauerstoffentziehung durch Natrium, welche das Nachleuchten be-

1) Lecoq de Boisbaudran, *Compt. rend.* 103. p. 629. 1886.

2) E. Warburg, *Ann. d. Phys.* 2. p. 306. 1900.

seitigt, einen solchen Einfluß nicht mehr. Vor und nach der Behandlung mit Natrium fand ich das negative Minimumpotential gleich 1460 Volt, die Stromstärke bei demselben Spitzenpotential kaum geändert.

§ 13. In der Literatur begegnet man zuweilen der Anschauung, daß der elektrische Strom, welcher von einer Spitze zu einer gegenüberstehenden Erdelektrode fließt, durch den elektrischen Wind befördert wird. Obgleich diese Anschauung durch die Versuche des § 6 widerlegt wird, so schien es doch nicht ohne Interesse, die Enden des von der Spitze ausgehenden Stromes an der Zylinderwand, welche die Spitze in den angewandten Apparaten umgibt, aufzusuchen. Zu dem Ende wurde der Apparat Fig. 5 benutzt, in welchem die Spitze *S* sich in dem Glasgefäß *G* befindet. Dieses wurde ganz in Natriumamalgam von 220° gebracht und nach § 9 Natrium durch das Glas hindurch geschickt, indem die Spitze *S* als Kathode im Gase diente. Dabei werden die Stromenden im Gase an der Glaswand durch Natriumausscheidung sichtbar. Nachdem fünf Stunden lang ein Strom von ungefähr 1,9 Milliampere gewirkt hatte, war der Teil *A B C* von *G* von einem Natriumspiegel bedeckt.

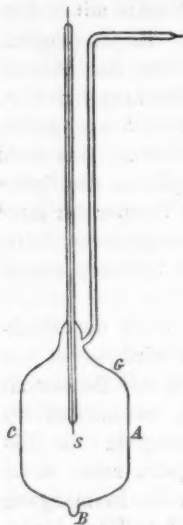


Fig. 5.  
 $\frac{1}{2}$  nat. GröÙe.

Während also der elektrische Wind sehr nahe der Achse verläuft, erfüllt der elektrische Strom einen körperlichen Winkel, welcher die Halbkugel übertrifft.

Heringsdorf, 10. August 1902.

(Eingegangen 16. Oktober 1902.)

**6. Die optischen Eigenschaften dünner  
Metallplatten;  
von Gilbert T. Walker.**

Es ist bekannt, daß die Reflexionserscheinungen von Lichtwellen an einer Metallfläche sich berechnen lassen mit Benutzung derselben analytischen Bedingungen, die für die Reflexion an einer nichtmetallischen Fläche gelten, wenn man den Refraktionsindex durch eine komplexe Zahl ersetzt.

Die Einzelheiten sind von Cauchy vom Standpunkt der elastisch-festen Theorie aus ausgearbeitet worden, während die elektromagnetische Theorie zu denselben Resultaten führt. Bei Anwendung von Gaußschen Einheiten können die Gleichungen des elektrischen Feldes in folgende Form gekleidet werden:

$$n^2(1 - ik)^2 \frac{dE}{dt} = V \operatorname{curl} H,$$

$$\frac{dH}{dt} = -V \operatorname{curl} E,$$

wo  $E$  und  $H$  die elektrische und magnetische Kraft vorstellen,  $V$  die Geschwindigkeit des Lichtes ist und  $n^2(1 - ik)^2$  an die Stelle der Dielektrizitätskonstante tritt.

In dem Falle einer dünnen Metallplatte ist die Anwendung von Cauchys Theorie von Jochmann<sup>1)</sup> ausgeführt worden; das Problem ist in neuerer Zeit von Voigt<sup>2)</sup>, Drude<sup>3)</sup> und J. J. Thomson<sup>4)</sup> erforscht worden.

Die dem allgemeinen Falle entsprechenden theoretischen Resultate sind von komplizierter Form. So haben denn auch

1) Jochmann, Pogg. Ann., Ergänzungsbd. 5. p. 620. 1871.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 25. p. 95. 1885.

3) P. Drude, Wied. Ann. 51. p. 77. 1894; Physik des Äthers, p. 578. 1894.

4) J. J. Thomson, Recent Researches, § 358. 1893.

J. J. Thomson<sup>1)</sup> und Drude<sup>2)</sup> angenäherte Ausdrücke erhalten, die dann anwendbar sind, wenn  $d/\lambda$  hinreichend klein ist, wobei  $d$  die Dicke der dünnen Schicht und  $\lambda$  die Wellenlänge bedeutet. Thomson findet, daß das Ergebnis auf optische Versuche nicht anwendbar ist, und Drude wendet es nur auf Hertzsche Wellen an. In sehr viel Fällen ist jedoch eine andere Art der Annäherung zulässig, und zwar ist diese besonders anwendbar auf viele der in den neuerdings von Hagen und Rubens veröffentlichten wichtigen und interessanten Arbeiten enthaltenen Beobachtungen.<sup>3)</sup>

Wir wollen planpolarisierte Lichtwellen betrachten, die senkrecht auf eine Metallplatte fallen, deren Grenzebenen als  $x=0$  und  $x=-d$  angenommen werden. Die elektrische Kraft in dem Luftgebiet  $x>0$  kann als reeller Teil von  $A e^{i(m x + p t)} + A' e^{i(-m x + p t)}$  angenommen werden, wo die beiden Glieder die einfallenden und die reflektierte Welle vorstellen und  $m = 2\pi/\lambda$ ,  $p = mV$  ist. Innerhalb des Metalles ist  $0 > x > -d$  und ist die elektrische Kraft der reelle Teil von  $B e^{i(m' x + p t)} + B' e^{i(-m' x + p t)}$ , wenn  $m'/m = n(1 - ik)$ ,  $n$  der Brechungskoeffizient und  $k$  der Absorptionskoeffizient des Metalles ist. In dem in die Luft austretenden Strahl ist die elektrische Kraft der reelle Teil von  $C e^{i(m x + p t)}$ .

Die gewöhnlichen Grenzbedingungen der elektromagnetischen Theorie ergeben dann Gleichungen, welche führen zu<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{(m + m')^2 e^{i m' d} - (m - m') e^{-i m' d}}{4 m^2 m' e^{i m d}} \\ &= \frac{(m + m')^2}{4 m m'} e^{i(m' - m)d} \left\{ 1 - \left( \frac{m - m'}{m + m'} \right)^2 e^{-2 i m' d} \right\} \\ &= \frac{\{1 + n(1 - ik)\}^2}{4 n(1 - ik)} e^{-2 \pi i(1 - n)d/\lambda} e^{2 \pi i n k d/\lambda} \\ &\quad \left[ 1 - \left\{ \frac{1 - n(1 - ik)}{1 + n(1 - ik)} \right\}^2 e^{-4 \pi i n d/\lambda} e^{-4 \pi i k n d/\lambda} \right]. \end{aligned}$$

1) l. c. p. 424.

2) P. Drude, Physik des Äthers, p. 581—582. 1894.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 432. 1902.

4) J. J. Thomson, l. c. Gleichung (11), p. 416; P. Drude, l. c. Gleichung (80), p. 581.



Nun ist für auf Silber auffallendes Natriumlicht  $4\pi kn = 46,12$ ; und wenn  $d/\lambda$  nicht klein ist, so ist  $e^{-4\pi kn d/\lambda}$  klein und der Faktor zwischen eckigen Klammern [ ] annähernd der Einheit gleich. Wenn z. B.  $d = 50 \mu\mu$  ist, so wird dieser Faktor<sup>1)</sup> gleich  $0,994 e^{(0,0029) 2\pi i}$ ; für  $d = 75 \mu\mu$  ist sein Wert gleich  $0,9994 e^{(0,00042) 2\pi i}$ , und für  $d = 100 \mu\mu$  ist er gleich

$$0,99996 e^{(0,00006) 2\pi i}.$$

Es sei

$$\frac{4n(1-ik)}{\{1+n(1-ik)\}^2} = \alpha e^{i\beta},$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  reelle Zahlen sind, welche nur von dem gewählten Metall abhängen. Wenn wir dann kleine Glieder vernachlässigen, so erhalten wir:

$$(I) \quad \frac{C}{A} = \alpha e^{-2\pi kn d/\lambda} e^{i\{\beta + 2\pi(1-n)d/\lambda\}}.$$

Bei dieser Annäherung variiert dann die Intensität des durchgelassenen Strahles proportional mit  $\alpha^2 e^{-4\pi kn d/\lambda}$  und besteht die Phasenbeschleunigung gegen die des einfallenden Lichtes aus einem Betrage  $\beta$ , der von Oberflächenwirkungen herrührt, und einem Betrage  $2\pi(1-n)d/\lambda$ , welcher zur Dicke der Platten proportional ist.

In ähnlicher Weise erhält man für den in Luft reflektierten Strahl

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{(m^2 - m'^2)(e^{im'd} - e^{-im'd})}{(m + m')^2 e^{im'd} - (m - m')^2 e^{-im'd}} \\ &= \frac{m - m'}{m + m'} \left[ \{1 - e^{-2im'd}\} \left\{1 - \left(\frac{m - m'}{m + m'}\right)^2 e^{-2im'd}\right\}^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Wie vorhin können wir zum Zwecke der Annäherung  $e^{-2im'd}$  vernachlässigen und die eckige Klammer durch die Einheit ersetzen. Wenn  $d = 50 \mu\mu$  ist, beträgt der entsprechende Fehler in der Intensität des reflektierten Strahles ungefähr

1) Hier sind Drudes Werte für  $n$  und  $nk$  benutzt worden.

2,7 Proz.; in der Phasenänderung macht er etwa 0,5 Proz. aus. Bei dickeren Platten ist er jedoch viel kleiner.

Für Gold ist die Annäherung etwas weniger gut. Der Fehler in der Durchlässigkeit beträgt etwa 1,5 Proz. für Platten von  $50 \mu\mu$ ; für dieselbe Genauigkeit in Bezug auf das Reflexionsvermögen ist eine Dicke von  $75 \mu\mu$  erforderlich.

Die elektromagnetische Theorie gibt  $(m - m')/(m + m')$  als Grenzwert von  $A'/A$  für dicke Platten: wir wollen diese Größe durch  $y e^{i\zeta}$  darstellen, wo  $y$  und  $\zeta$  reell sind. Das Reflexionsvermögen, das von Hagen und Rubens mit  $R$  bezeichnet wird, wird dann  $y^2$ . Wenn wir nun nach dem Vorgang dieser Autoren die Intensität des einfallenden und des austretenden Lichtes mit  $J_0$  und  $i$  bezeichnen, so liefert uns (I)

$$\log \frac{i}{J_0} = 2 \left\{ \log_e \alpha - 2 \pi n k \frac{d}{\lambda} \right\}.$$

Also, wenn  $\mu = \log_{10} e$ , so haben wir

$$(II) \quad \log_{10} \frac{i}{J_0} = 2 \log_{10} \alpha - 4 \pi \mu n k \frac{d}{\lambda}.$$

Entsprechend diesem Ergebnis stellen jedoch Hagen und Rubens ohne gehörige Untersuchung fest, daß<sup>1)</sup>

$$\log \frac{i}{J_0} = \log p = -a d + \log(1 - R),$$

wo  $a$  gegeben ist durch

$$n k = \frac{a \lambda}{4 \pi \mu},$$

also

$$(III) \quad \log \frac{i}{J_0} = -4 \pi \mu n k \frac{d}{\lambda} + \log(1 - y^2).$$

1) Vgl. l. c., p. 444. Auf p. 433 ist die Absorptionskonstante definiert durch die Gleichung  $i/J = 10^{-ad}$ , wo  $J$  die Intensität des Lichtes ist, das gerade in das Metall eingetreten ist. An Stelle von  $i$  müßten wir in dieser Gleichung die Intensität des Lichtes gerade vor dem Austreten haben, ein endlicher Betrag von Licht wird an der zweiten Fläche in die Metallplatte zurückreflektiert.

Da  $(1 - y^2)$  nicht einmal angenähert gleich  $\alpha^2$  ist, so sind die beiden Ausdrücke (II) und (III) miteinander nicht zu vereinigen.

Aber die von Hagen und Rubens angewandte Methode, um  $nk$  zu finden, besteht im Aufzeichnen des geometrischen Ortes, der bestimmt ist durch die Koordinaten  $(d, \log J_0/i)$ ; dieser Ort ist eine gerade Linie, deren Neigung zur  $d$ -Achse  $\text{tg}^{-1} 4\pi\mu nk/\lambda$  beträgt. Durch Messung dieser Neigung erhält man  $nk$  und ein Fehler in diesem Gliede von (II), das von  $d$  unabhängig ist, beeinflußt das erhaltene Resultat nicht.

Um die Theorie mit dem Experiment zu vergleichen, habe ich die theoretischen Berechnungen für Gold und Silber durchgeführt, die dann Anwendung finden, wenn Natriumlicht durch Platten hindurchgeht, deren Dicke zwischen Null und  $10^{-5}$  cm variiert. Die angewandten Konstanten sind die von Drude erhaltenen, und zwar habe ich die unverkürzten Formeln benutzt. Um die Eigenschaften graphisch darzustellen, habe ich die Resultate für Platten mit hinzugenommen, deren Dicke so klein ist, daß  $\delta^2/\lambda^2$  vernachlässigt werden kann.<sup>1)</sup>

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 enthalten. Wenn wir  $C/A$  mit  $Me^{i\theta}$  und  $A'/A$  mit  $Ne^{i\varphi}$  bezeichnen, so können wir  $M^2$  die Durchlässigkeit und  $N^2$  das Reflexionsvermögen nennen;  $\theta/2\pi$  ist dann die Differenz zwischen der Phase des durchgelassenen und der des auffallenden Lichtes, in Bruchteilen einer Wellenlänge ausgedrückt;  $\phi/2\pi$  ist die entsprechende Differenz für das reflektierte Licht. Die Tabellen enthalten auch die Werte von  $d/\lambda$ ; dieselben würden die entsprechende Phasendifferenz des durchgelassen Lichtes sein, wenn die Platte durch Luft ersetzt würde.

1) Dieselben sind nach den leicht erhältlichen Formeln

$$\frac{C}{A} = (1 - n^2 k s) \{1 + \frac{1}{2} i s (1 - n^2 + n^2 k^2)\},$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{2} \{1 - n^2 (1 - i k)^2\} i s [1 - \frac{1}{2} i s \{1 + n^2 (1 - i k)^2\}],$$

wo  $s = 2\pi \delta/\lambda$  ist, in die Tabellen eingetragen worden.

Tabelle 1.

## Gold.

$d$ in $\mu\mu$	$\delta$	5	12,5	25	50	75	100	$\alpha$
$M^2 = \frac{i}{J_0}$	$1 - 0,0220 \delta$	0,855	0,598	0,291	0,0653	0,0146	0,00327	0
$\log \frac{J_0}{i}$	$0,00956 \delta$	0,068	0,223	0,536	1,185	1,835	2,486	$\alpha$
$\frac{\theta}{2\pi}$	$0,00664 \delta$	0,035	0,077	0,124	0,174	0,206	0,234	$\alpha$
$\frac{d}{\lambda}$	$0,0017 \delta$	0,0085	0,0212	0,0424	0,0849	0,1273	0,1698	$\alpha$
$\frac{\Phi}{2\pi}$	$0,287 + 0,00494 \delta$	0,313	0,344	0,372	0,390	0,398	0,393	0,393
$N^2$	$0,00233 \delta^2$	0,050	0,228	0,510	0,763	0,830	0,846	0,861

Tabelle 2.

## Silber.

$d$ in $\mu\mu$	$\delta$	5	12,5	25	50	75	100	$\alpha$
$M^2 = \frac{i}{J_0}$	$1 - 0,0142 \delta$	0,818	0,454	0,152	0,0197	0,0028	0,00039	0
$\log \frac{J_0}{i}$	$0,00615 \delta$	0,0875	0,343	0,819	1,705	2,560	3,410	$\alpha$
$\frac{\theta}{2\pi}$	$0,0123 \delta$	0,0570	0,118	0,173	0,225	0,263	0,298	$\alpha$
$\frac{d}{\lambda}$	$0,0017 \delta$	0,0085	0,0212	0,0424	0,0849	0,1273	0,1698	$\alpha$
$\frac{\Phi}{2\pi}$	$0,265 + 0,0106 \delta$	0,313	0,362	0,397	0,413	0,415	0,415	0,415
$N^2$	$0,00598 \delta^2$	0,124	0,459	0,772	0,925	0,947	0,951	0,951

Der theoretische Wert von  $\log(T_0/i)$  für Gold wird durch die kontinuierliche Linie in Fig. 1 dargestellt. Der fragliche geometrische Ort ist kaum von einer geraden Linie verschieden für Dicken, die größer sind als  $12 \mu\mu$ ; die Tangente im Koordinatenursprung ist durch eine punktierte Linie angegeben. Die Sterne \* auf dieser Figur stellen vier experimentelle Werte vor für  $\lambda = 0,589 \mu$ , welche aus Hagen und Rubens'

Versuchsergebnissen<sup>1)</sup> gewonnen worden sind, indem zwischen  $\lambda = 0,55 \mu$  und  $\lambda = 0,6 \mu$  interpoliert wurde.

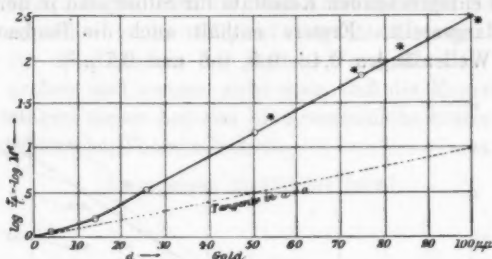
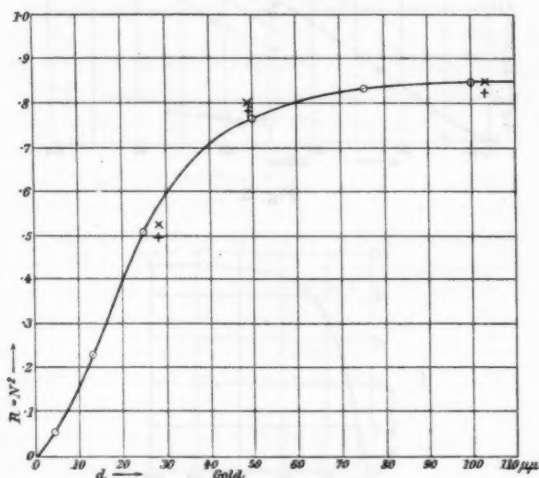


Fig. 1.



- für  $\lambda = 0,589$  theoretisch.  
 × für  $\lambda = 0,6$  experimentell.  
 + für  $\lambda = 0,589$  experimentell interpoliert.

Fig. 2.

Fig. 2 zeigt die Wirkung der Dicke auf das Reflexionsvermögen. Die kontinuierliche Kurve ist theoretisch; die Zeichen × geben die experimentellen Werte für  $\lambda = 0,6 \mu$  an,

1) E. Hagen u. H. Rubens, l. c., Tab. 4. p. 447.

und die Zeichen + bedeuten die wie früher<sup>1)</sup> durch Interpolation erhaltenen für  $\lambda = 0,589 \mu$ .

Die entsprechenden Resultate für Silber sind in den Figg. 3 und 4 dargestellt. Erstere enthält auch die Beobachtungen für die Wellenlängen 0,42, 0,5, 0,6 und 0,7  $\mu$ .<sup>2)</sup>

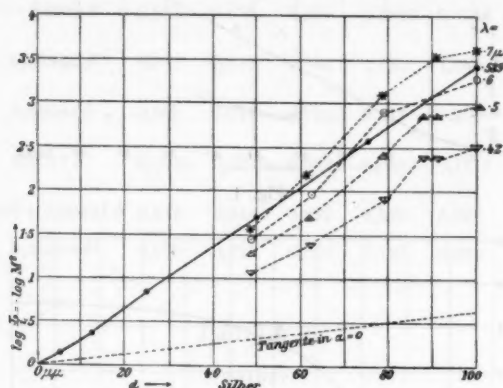


Fig. 3.

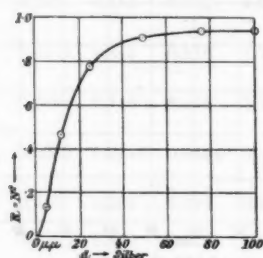


Fig. 4.

Aus ihren Resultaten folgern Hagen und Rubens, daß für Natriumlicht und Platten aus chemisch niedergeschlagenem Silber  $nk = 4,12$  anstatt 3,67 ist, welch letzteres Drudes

1) l. c., Tab. 2. p. 441.

2) l. c., Tab. 3. p. 446.

Wert für Silber in größerer Masse ist. Aber die Unregelmäßigkeiten der Kurven, die durch die beobachteten Punkte gezogen sind, zeigen deutlich, daß experimentelle Schwierigkeiten vorhanden sind; vielleicht liegt hieran zum Teil die Ursache für die Differenz der beiden Werte für  $n_k$ .

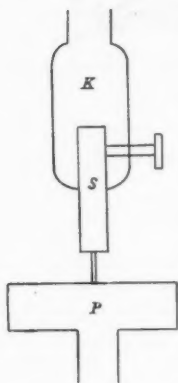
Im großen und ganzen sieht man, daß die Experimentaluntersuchungen dieser Autoren eine wesentliche Stütze für die elektromagnetische Theorie liefern.

(Eingegangen 23. Oktober 1902.)

**7. Über die Bildung leitender Brücken an der Stelle, wo ein Strom von geringer Spannung unterbrochen wird; von Th. Sundorph.**

*P* ist eine feststehende Metallplatte, *S* eine Metallstange von einem zirka 1 mm großen Diameter. *S* ist durch eine Klemmschraube *K* befestigt, welche mit Hülfe einer Mikrometerschraube, eingeteilt in halbe Grade, gehoben und gesenkt werden kann.

*S* wird ungefähr  $\frac{1}{3000}$  mm gehoben oder gesenkt, wenn die Mikrometerschraube  $\frac{1}{2}$  Grad umgedreht wird. *S* und *P* sind mit den Polen von einem oder zwei Bunsenelementen in Verbindung gesetzt, und in die Leitung sind ein Widerstandskasten und ein Galvanometer eingeschoben, welches letztere oft mit einer Kompaßnadel ersetzt ist, um soweit als möglich die Selbstinduktion zu vermindern, welche nicht allein nicht eine Bedingung bei den Versuchen ist, sondern am liebsten vermieden werden muss. — Zuerst wird *S* so weit gesenkt, daß sie *P* berührt, wodurch der Strom in Gang kommt. Wenn dann *S* mit Hülfe der Mikrometerschraube vorsichtig gehoben wird, bleibt der Strom bestehen, und man wird zwischen *S* und *P*



eine Brücke sehen, deren Dicke zum öfteren zwischen 0,01 und 0,05 mm liegt. Diese Brücke wird besser durch stärkere als durch schwache Ströme und besser durch eine langsame als durch eine rasche Drehung der Mikrometerschraube gebildet. Die Stromstärke war in der Regel 2,5 Amp., und bei den Metallen, welche am leichtesten eine Brücke bildeten, konnte diese ca.  $\frac{1}{10}$  mm lang werden. Für die



Stromstärke kann jedoch die Länge und Dicke nicht bestimmt angegeben werden, da diese von der Langsamkeit der Drehung und den etwaigen Pausen zwischen denselben abhängig ist. Bei den Versuchen wurde Platin, reines Silber, Eisen, Kupfer, Aluminium, Nickel, Zink, Blei, Zinn, Wismut, Antimon und Kadmium verwandt.

Die Berührungsstelle zwischen *S* und *P* wurde durch ein Mikroskop mit geringer Vergrößerung, aber mit einem ziemlich tiefen Gesichtsfelde beobachtet. Das Mikroskop war mit einem Drahtmikrometer versehen, sodaß die Länge und Dicke der Brücke gemessen werden konnte.

*Die Bildung der Brücke.* Wenn man die Umdrehung beginnt, so wird es eine Zeit dauern, bis sich Zwischenraum zwischen *P* und der unteren Fläche von *S* zeigt. Der Zwischenraum, welcher hätte gebildet werden sollen, ist von einem Stoff ausgefüllt, welcher vom Metall ausgeschieden ist. Es ist nicht die Stange *S*, welche sich durch die vom Strom erzeugte Wärme erweitert; denn ist die Stange z. B. von Aluminium, so kann sich schon Zwischenraum nach  $8^\circ$  Drehung zeigen, aber es kann auch passieren, daß Zwischenraum weit später gebildet wird, z. B. nach  $55^\circ$  Drehung (dieselbe Stromstärke in beiden Beispielen); der Zwischenraum, welcher zum mindesten  $47^\circ$  Drehung entspricht, muß also ausgefüllt sein. Dreht man sehr langsam, bedarf es vielmehr der Grade bei der Drehung, bis Zwischenraum sich zeigt, als wenn rasch gedreht wird, und die Schnelligkeit der Drehung kann unmöglich einen Einfluß auf die Verlängerung der Stange durch die Stromwärme haben. Und schließlich ist es nicht anzunehmen, daß die kurze Stange eine so hohe Temperatur erreichen könnte, welche notwendig wäre zu den Erweiterungen; von denen hier die Rede sein kann.

Hat man so lange gedreht, bis ein kleiner Zwischenraum hervorgebracht ist, sieht man in demselben eine dunkle Brücke, mitunter mehrere, von einem halbklaren Raum umgeben, welcher aus unzähligen, außerordentlich feinen Drähten zu bestehen scheint. Diese Teile in dem halbklaren Raum sind oft in steter Bewegung, welche sich namentlich dadurch kundgibt, daß derselbe an einzelnen Stellen dunkler oder heller wird. Hört man mit dem Drehen auf, wird der Raum in kurzer

Zeit ganz dunkel. Man sieht oft, daß es Metallstoff ist, welcher in den halbklaaren Raum hinunterschießt und denselben schließt.

Hebt man nun *S* wieder ein wenig in die Höhe, wird aufs neue ein halbklaarer Raum mit dunkler Brücke gebildet, welcher sich wieder schließt, sobald man mit dem Drehen aufhört etc. Es ist einige Male passiert (mit Zink und Silber), daß zwischen *S* und *P* keine sichtbare Verbindung gewesen ist, wenn dieselben etwas voneinander entfernt waren, obgleich der Strom zu strömen fortfuhr. Nach Verlauf einiger Sekunden erschien dann ein sehr feiner Draht, dessen Dicke rasch bis ungefähr 0,01 mm wuchs. In diesen Fällen muß der Strom vermutlich von *S* bis *P* durch so feine Drähte gegangen sein, daß man keine Verbindung im Mikroskop sehen konnte. Einige feine Drähte haben sich schnell darauf zu einem sichtbaren Draht vereinigt.

Die erwähnten Bewegungen nehmen in dem halbklaaren Raum bei Aluminium, Zinn, Blei, Zink und Platin oft eine eigentümliche Form an. Wenn man einen halbklaaren Raum mit einer deutlichen Brücke in der Mitte gebildet hat und mit dem Drehen aufhört, wird der Zwischenraum zwischen *P* und der unteren Fläche von *S* abwechselnd größer und kleiner werden; es sieht aus, als ob das untere Ende der Stange *S* auf- und niedergehe. Es sind offenbar ähnliche Bewegungen der Metallteile, bloß in mehr ausgeprägtem Grade, als diejenige, welche vor sich gehen, wenn der halbklaare Raum sich schließt; denn auch hierbei passiert es häufig nach einigen Schwingungen, daß der Zwischenraum sich ganz schließt und geschlossen bleibt. Hebt man nun *S* so hoch, daß wiederum ein Zwischenraum entsteht, fangen in der Regel die starken Bewegungen wieder an. Daß diese scheinbare auf- und niedergehende Bewegung der Stange nicht in Verbindung mit Temperaturschwankungen oder Erschütterungen in der Umgebung steht, davon kann man sich leicht durch verschiedene Versuche überzeugen (Hervorrufung von Temperaturschwankungen und Erschütterungen, langwierige Beobachtung von kleinen Zwischenräumen, wenn kein Strom geht). Endlich muß noch erwähnt werden, daß bei Aluminium, Zink und Blei zuweilen plötzlich eine lange

Brücke gebildet wird. Die Aluminiumstange ist z. B.  $50^\circ$  gehoben, aber der Zwischenraum ist die ganze Zeit vollständig geschlossen gewesen. Plötzlich verschwindet der Stoff aus dem Zwischenraum, aber mitten in diesem steht nun eine lange, scharf begrenzte Brücke ohne halbklare Umgebungen. Dieses Phänomen ist ja nur eine Abänderung des oben erwähnten; es zeigt, mit wie großer Schnelligkeit die Bewegung der Partikel vor sich geht, indem es unmöglich ist zu erkennen, wohin der Stoff geht, ob derselbe sich zusammenzieht und die Brücke bildet, oder ob derselbe sich ins Metall zurückzieht, wodurch die Brücke, welche dann die ganze Zeit dort gewesen ist, sichtbar wird.

Bei stetigem Fortsetzen der Drehung verschwindet der halbklare Raum und nur die scharf begrenzte Brücke ist sichtbar; diese bricht zuletzt und der größte Teil der Brücke verschwindet oft. Die bei 2 Amp. erreichten größten Drehungen waren beim Eisen  $150^\circ$ , Zinn  $150^\circ$ , Blei  $120^\circ$ , Nickel  $94^\circ$ , Kupfer  $92^\circ$ , Aluminium  $69^\circ$ , Zink  $65^\circ$ , Wismut  $65^\circ$ , Kadmium  $58^\circ$ , Platin  $50^\circ$ , Silber  $32\frac{1}{2}^\circ$ , Antimon  $30^\circ$ .

*Die Beschaffenheit der Brücke.* Die Brücken müssen entweder aus geschmolzenem Metall, nicht geschmolzenem Metall oder Metalloxyd bestehen. Bei Platin, Nickel, Eisen, Kupfer, Silber und Aluminium müssen die Brücken glühend sein, wenn sie aus geschmolzenem Metall bestehen, aber bei den fünf letztgenannten kann man recht lange Brücken bilden, ohne daß sich im Dunklen die geringste Glühung oder Funkenbildung zeigt. Da die Oxyde der erwähnten Metalle in kaltem Zustande schlechte Leiter sind, kann man sich davon überzeugen, ob die Brücke aus reinem oder oxydierten Metall besteht, indem man untersucht, ob die Brücke nach geschehener Stromunterbrechung und genügender Abkühlung leitend oder nichtleitend ist. Um diese Verhältnisse näher zu beleuchten, werden hier einige Zahlenbeispiele bei den Versuchen angeführt.

*Nickel.* Nach  $10^\circ$  Umdrehung zeigte sich ein Zwischenraum zwischen *S* und *P*. Nach  $30^\circ$  Umdrehung war die Brücke nicht glühend gewesen, und es hatten sich keine Funken gezeigt. Der Strom wurde nur unterbrochen, wobei das eine Ende der Brücke sich von der Nickelplatte löste, während das andere Ende an der Nickelstange hängen blieb.

Nach Verlauf einiger Minuten mußte die Brücke bis zur Temperatur ihrer Umgebung abgekühlt sein. *S* wurde gesenkt, bis die Brücke die Nickelplatte berührte. Der Draht war gut leitend.

*Nickel.* Nach  $14^{\circ}$  Umdrehung zeigte sich ein Zwischenraum. Nach  $35^{\circ}$  Umdrehung begannen sich Funken zu zeigen, deren Häufigkeit zunahm, bis die Brücke nach  $60^{\circ}$  Umdrehung glühend wurde. Sie glühte nun fortwährend, bis sie nach  $94^{\circ}$  Umdrehung sich von der Nickelplatte löste. Nach geschehener Abkühlung, indem man sich ebenso benahm, wie oben erwähnt, zeigte es sich, daß der Rest schlecht leitend war, indem sie Stromstärke, welche von vorneherein 2 Amp. gewesen war, nun nur 9 Milliamp. war.

Die Brücke hat also zuerst aus nicht geschmolzenem, reinem Nickel bestanden, später, als die Brücke länger wurde, wurde dieselbe glühend und teilweise zu Nickeloxyd umgebildet.

In gleicher Weise ist der Vorgang beim Kupfer, wo die Brücke weich und zähe ist, wenn der Strom unterbrochen wird, ehe sich Funken zeigen. Die Brücke kann schwach glühend werden, wenn sie lang wird. Eisen verhält sich ungefähr wie Nickel. Die Brücke ist porös und leicht zerbrechlich sowie gut leitend, selbst wenn sie glühend gewesen ist; sie glüht in der Regel stark während des letzten Teiles der Drehung.

Beim Silber verschwindet die Brücke ganz, wenn der Strom unterbrochen wird. Die Brücke ist nicht glühend, und es werden selten Funken gesehen.

Aluminium verhält sich ungefähr wie Kupfer. Bei dem Platin ist es sehr schwierig eine Brücke zu bilden. Der Zwischenraum zwischen der Stange und Platte kann gänzlich geschlossen sein bis zu  $50^{\circ}$  Drehung. In der Regel werden während der ganzen Umdrehung Funken gesehen; sie nehmen an Häufigkeit zu, bis sich zuletzt an einer bestimmten Stelle ein stetiges starkes Licht zeigt. In einzelnen Fällen können die Funken ziemlich schwach sein, und es erscheint dann zuletzt eine Brücke in einem halbklaren Raum, in welchem sich eine Menge feiner Drähte befinden. Wenn der Strom unterbrochen wird, sieht man keinen Rest an der Stange und Platte.

Bei den übrigen Metallen, deren Schmelzpunkt unter  $500^{\circ}$  liegt, kann man nicht mit Sicherheit bestimmen, ob die Brücken aus geschmolzenem oder ungeschmolzenem Metall bestehen. Sie wachsen oft stark an Umfang, und es könnte zuweilen aussehen, daß es geschmolzenes Metall ist, welches längsseits der Brücken herunterfließt und dieselben dicker macht. Wenn die Brücken zuletzt zuweilen schwach glühend werden, ist es ja keinem Zweifel unterworfen, daß sie geschmolzen sind. Oft kommen jedoch Erscheinungen zum Vorschein, welche auf das Entgegengesetzte deuten könnten.

Die Brücken können z. B. sehr unregelmäßig gebildet sein. Wird der Strom unterbrochen, kann der Rest der Bleibrücke, welcher fest an der unteren Fläche der Stange *S* hängt, nach geschiederer Abkühlung sich über die untere Fläche der Stange ausbreiten, wenn man mit einem Bleistift an die Stange klopft, welche die Klemmschraube *K* trägt. Da kurz vorher geronnenes Blei ziemlich hart ist, könnte dieses nicht geschehen, wenn die Bleibrücke aus geschmolzenem Metall bestände.

*Stange und Platte von verschiedenem Metall.* Hiermit sind verschiedene Versuche unternommen, von welchen einige erwähnt werden sollen, welche mit Sicherheit zeigen, daß die Stromrichtung eine Rolle spielt. Wenn *S* Silber und *P* Kupfer war, oder umgekehrt, konnte keine Brücke gebildet werden, wenn der Strom von Silber auf Kupfer ging; die Drehungen, welche erreicht werden konnten, ehe der Strom aufhörte, lagen zwischen  $2\frac{1}{2}^{\circ}$  und  $19^{\circ}$ . Ging der Strom dagegen von Kupfer zu Silber, konnte man mit Leichtigkeit eine lange Brücke bilden ( $121^{\circ}$  Umdrehung, bis der Strom aufhörte), welche ähnlich aussah wie die langen Brücken, welche zwischen Kupfer-Kupfer gebildet werden. Diese Brücken wachsen nämlich stark in die Dicke und werden in der Regel nach und nach kegelförmig mit der Grundfläche gegen die Stange gewendet, wenn der Strom von der Stange zur Platte geht, gegen die Platte, wenn der Strom von der Platte zur Stange geht. Auf dieselbe Weise sind Eisenbrücken zu erkennen, wenn sie lang werden. Es zeigt sich oft, daß sich die für Kupfer und Eisen charakteristischen Brücken bilden, wenn der Strom von Kupfer oder Eisen zu einem anderen Metall geht.

Eine Reihe von Versuchen, bei welchen der Strom wechselweise von Blei zu Kupfer und umgekehrt ging, gaben als Resultat, daß die Brücke durchschnittlich fünfmal so lang werden kann, wenn der Strom von Blei zu Kupfer, als wenn er den entgegengesetzten Weg geht.

Platin-Platin bildet, wie schon früher erwähnt, sehr schwierig eine Brücke, sondern nur einen dunklen Raum. Leitet man dagegen den Strom von Zink zum Platin, kommt schon ein Zwischenraum nach  $8^{\circ}$  bis  $10^{\circ}$  Umdrehung, und bei fortgesetztem Umdrehen bildet sich eine sehr lange Brücke, von der man annehmen muß, daß sie vom Zink hervorgebracht wird. Geht der Strom vom Platin zum Zink, ist lange ein dunkler Zwischenraum vorhanden und darauf eine kurze Brücke ohne Reste, nachdem der Strom unterbrochen ist, und ohne Funken, das ist eine Mischung der Eigenschaften der Platin- und Zinkbrücke.

Endlich muß noch erwähnt werden, daß Aluminium und Zink fast gar keine Brücke miteinander bilden können, gleichviel in welcher Richtung der Strom geht, obgleich beide Metalle jedes für sich gute Brückenbildner sind. Aluminium-Kupfer und Zink-Kupfer bilden dagegen gute Brücken, unabhängig von der Stromrichtung.

Kopenhagen, Oktober 1902.

(Eingegangen 24. Oktober 1902.)

### 8. *Über die Grundlage der Lösungstheorie; von Mathias Cantor.*

Die neueren Untersuchungen über die Eigenschaften der Lösungen wurden zunächst durch die Ideen geleitet, welche van't Hoff und Arrhenius von dem Zustande, in welchem sich gelöste Stoffe befinden, entwickelt haben. Diese Ideen erwiesen sich in der Tat ungemein fruchtbar und es ist mit ihrer Hülfe gelungen, Erscheinungen der verschiedensten Art miteinander in Beziehung zu bringen. Die Grundlage für diese erfolgreichen Arbeiten bildete die Analogie, welche zwischen dem idealen Gaszustande und dem Zustande in verdünnter Lösung nach van't Hoff's Auffassung bestand. Es entsprach einem Bedürfnis, die Theorie der Lösung auf einer exakteren Basis zu entwickeln. Durch die Untersuchungen des Hrn. Planck<sup>1)</sup>, welche jene Analogie nicht voraussetzten und ausser den Sätzen der Thermodynamik nur einen allgemeinen Erfahrungssatz zu benutzen schienen, sollte diesem Bedürfnis entsprochen werden. In der Tat wurden sie ohne Widerspruch als sicheres Fundament der Lösungstheorie angenommen und vielfach benutzt. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, daß sie von einer Voraussetzung ausgehen, welche weder theoretisch noch durch direkte Erfahrung begründet, sondern rein hypothetisch ist, und daß sie daher den vermeinten Vorzug nicht besitzen. Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen des Hrn. Planck bildet seine Berechnung der Entropie einer verdünnten Lösung. Bezeichnet  $S$  dieselbe, so ist

$$S = n(s + N) + n_1(s_1 + N_1) \dots$$

Es bezeichnen hier die  $n$  die Anzahl der Moleküle der in der Lösung angenommenen Bestandteile.

Die  $s$  sind Funktionen von Temperatur und Druck, aber unabhängig von den  $n$ , während die  $N$  nur von den  $n$  abhängig, von Temperatur und Druck aber unabhängig sind. —

1) M. Planck, Wied. Ann. 32. p. 485. 1897; Vorles. über Thermodynamik p. 210. 1897.



Um die Größen  $N$  zu berechnen wird vorausgesetzt, daß durch Änderung von Temperatur und Druck bei ungeänderten Moleküllzahlen, also bei ungeänderter Molekularzusammensetzung, das flüssige System in den Zustand eines idealen Gasgemenges gebracht werden könnte. Es wird darauf hingewiesen, daß diese Vergasung nur „im idealen Sinne“ ausführbar zu sein braucht, und daß es für die theoretische Benutzung dieses Prozesses nicht erforderlich, daß der angenommene Zustand stabil sei. Dies ist gewiß zuzugeben — aber es müßte nachgewiesen werden, daß er einen überhaupt *möglichen* Zustand des Stoffs darstellt, daß er wenigstens als augenblicklicher Bewegungszustand möglich sei. Hierfür ist aber nie ein theoretischer Beweis erbracht worden und die direkte Erfahrung berechtigt durchaus nicht zu einer solchen Annahme. —

Als Bestandteile von Lösungen werden Atomgruppen angenommen, für deren Existenz in einem anderen als dem gelösten Zustande keinerlei Erfahrung vorhanden ist. Die Annahme solcher Gruppen kann durch das Verhalten dieser Lösungen gerechtfertigt sein, ist aber lediglich ein Ausdruck eben der Erfahrungen, welche sich auf den gelösten Zustand beziehen. Deswegen beschränkt sich diese erfahrungsmäßige Begründung auch *ausschließlich auf den gelösten Zustand*, während die weitere Annahme, wonach jene Atomgruppen fähig wären auch den gasförmigen Zustand anzunehmen, durch keine Erfahrung begründet ist.

Gerade diese Annahme aber liegt dem idealen Prozesse des Hrn. Planck zu Grunde. Bei der Vergasung einer verdünnten Lösung müßten die Bestandteile derselben die Atomgruppierungen, welche sie in der Lösung besitzen, oder richtiger, welche ihnen in der Lösung zugeschrieben werden, bis zur Überführung in den Zustand eines idealen Gases beibehalten und erst dann dürfte die Umlagerung zu jenen Gruppen erfolgen, welche wir ihnen, als Folge unserer auf den Gaszustand bezüglichen Erfahrungen, in diesem Zustande beilegen. Daß eine solche Annahme weit davon entfernt eine allgemeine Erfahrung zum Ausdruck zu bringen, vielmehr *gänzlich hypothetisch* ist, dürfte doch wohl einleuchtend genug sein, um ein Eingehen auf übrigens naheliegende Beispiele überflüssig zu machen. Mit demselben, vielleicht mit größerem Rechte, könnte die gerade



entgegengesetzte Voraussetzung gemacht werden: Ein bestimmter Aggregat(Lösungs-)Zustand ist eine *notwendige Bedingung* für das Vorhandensein bestimmter Atomgruppen, das Aufhören dieses Zustandes bedeutet implizit die Umlagerung jener Gruppen; den Aggregatzustand ändern und die Molekularstruktur erhalten zu wollen, hieße begrifflich sich Widersprechendes realisieren wollen.

Wenn Hr. Planck meint <sup>1)</sup>, daß er neben den Sätzen der Thermodynamik nur den allgemeinen Erfahrungssatz benutzt, daß alle Substanzen durch genügende Temperaturerhöhung und Druckerniedrigung sich in den Gaszustand bringen lassen, so liegt wohl ein Irrtum vor. Denn die Vergasbarkeit jeder Substanz als Ergebnis einer allgemeinen Erfahrung besagt bloß, daß sich immer gasförmige Systeme von derselben *empirischen* Zusammensetzung wie gegebene flüssige oder feste herstellen lassen. In welcher Weise aber bei einer solchen Verwandlung die Atomgruppierungen erhalten, bez. verändert werden, darüber läßt sich erfahrungsmäßig nichts Allgemeines aussagen. Die Annahme, daß ein flüssiges System in ein gasförmiges verwandelt werden und *auch nur vorübergehend* seine Molekularstruktur erhalten könnte, hat keinerlei erfahrungsmäßige Begründung, sie ist eine bloße und nicht einmal eine wahrscheinliche Hypothese.

Auf dieser Hypothese beruhen aber die Rechnungen des Hrn. Planck. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind demnach gleichfalls hypothetisch und der Umstand, daß im übrigen nur die wohlbegründeten Sätze der Thermodynamik zur Anwendung gelangen, vermag ihnen keinen höheren Grad von Sicherheit zu verleihen.

Hr. Jahn <sup>2)</sup> hat jüngst eine Erweiterung der Theorie der verdünnten Lösungen versucht, aber auch sein Ansatz geht von der Grundlage aus, welche Hr. Planck gegeben hat, und es gilt sonach auch für diese erweiterte Theorie das oben Ausgeführte.

Den Anlaß zu dieser Erweiterung boten die sehr sorgfältigen Messungen, welche Hr. Jahn an Konzentrationselementen ausgeführt hat, und welche mit den seither entwickelten Formeln

---

1) M. Planck, Wied. Ann. **32**. p. 500. 1887.

2) H. Jahn, Zeitsch. f. phys. Chem. **41**. p. 257. 1902.

nicht in Übereinstimmung standen. Für die theoretische Verwertung solcher Messungen wäre es vielleicht zweckmäßig statt der Konzentrationselemente die von Helmholtz angegebene Gegenschaltung von Elementen mit verschiedenen konzentrierten Lösungen zu untersuchen. Dadurch würden die auf das Gleichgewicht in Lösungen bezüglichen Fragen unabhängig von den Überführungszahlen beurteilt werden können, welche sich auf einen Bewegungszustand<sup>1)</sup> beziehen und deren Veränderlichkeit mit der Konzentration eine schwer zu übersehende Komplikation unnötig herbeiführt. Im übrigen gelangt die Theorie des Hrn. Jahn<sup>2)</sup> zu Ausdrücken, welche, wie er selbst angibt, einen exakten Vergleich mit Beobachtungen gar nicht gestatten.

Die bisherige Behandlung hat hiernach selbst für sehr verdünnte Lösungen zu *keinem* befriedigendem Ergebnis geführt, Lösungen von höherer Konzentration aber wurden von der Betrachtung gänzlich ausgeschlossen.

Es dürfte unter diesen Umständen von Interesse sein zu zeigen, daß gerade für Lösungen von höherem Gehalt eine Theorie gänzlich frei von Hypothesen entwickelt werden kann.

Den Ausgangspunkt derselben bildet die Festsetzung der Veränderlichen, durch welche der Zustand der Lösung bestimmt werden kann. Man hat als solche bisher *die Mengen der in der Lösung enthaltenen Bestandteile* gewählt, diese sind aber im allgemeinen gar nicht bestimmbar und so wird durch diese Wahl sofort ein hypothetisches Element eingeführt. Im Gegensatz hierzu soll der Zustand der Lösung nur durch Größen beschrieben werden, welche eine direkte experimentelle Bestimmung gestatten. Es werde als Mischung definiert eine homogene Phase, welche durch Mischen verschiedener Stoffe — der Komponenten — entstanden ist und deren sämtliche Eigenschaften, abgesehen von Form und Menge im Gleichgewichte, eindeutige und stetige Funktionen der Mengenverhältnisse der Komponenten sind. *Die direkt meßbaren Mengen der Komponenten*  $x$ ,  $y$ ,  $z$  werden als unabhängige Veränderliche festgesetzt.

Aus der Definition folgt, daß durch diese Veränderlichen der Zustand der Lösung eindeutig bestimmt ist und daß jede

1) Vgl. M. Planck, Zeitsch. für phys. Chem. 41. p. 222. 1902.

2) l. c. p. 288.

von Menge und Form unabhängige Eigenschaft eine homogene Funktion 0<sup>ter</sup> Ordnung der Veränderlichen ist. Unter den so definierten Begriff der Mischung werden die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch als Lösungen und homogene Gemenge bezeichneten Phasen subsumiert. Sie sind leicht charakterisierbar. Es gilt für jede Eigenschaft  $e$  einer Mischung die Gleichung

$$0 = x \frac{\partial e}{\partial x} + y \frac{\partial e}{\partial y} + z \frac{\partial e}{\partial z} + \dots$$

Für die homogenen Gemenge ist  $e$  eine linear gebrochene Funktion.

Es soll nun sogleich ein ganz spezieller Fall behandelt werden, eine flüssige Lösung, deren Komponenten eine Flüssigkeit — das Lösungsmittel (Wasser) — und ein fester Stoff — das Salz — seien. Von diesen Lösungen ist erfahrungsmäßig bekannt, daß sie bei bestimmten Temperaturen mit festen Phasen derselben Komponenten — Hydraten — koexistieren. Die Hydrate haben im allgemeinen eine von der koexistenten Lösung verschiedene Zusammensetzung, nur das der kryohydratischen Temperatur entsprechende — das Kryohydrat — ist mit der koexistenten Lösung gleich zusammengesetzt. Lösungen mit höherem Salzgehalt als das Kryohydrat sollen konzentriert, mit geringerem verdünnt heißen.

Hierbei soll indes bemerkt werden, daß die so definierten konzentrierten Lösungen nicht notwendig salzreich sein müssen, vielmehr können bei geeigneter Wahl des Lösungsmittels im allgemeinen auch sehr salzarme Lösungen „konzentriert“ sein.

Das Folgende bezieht sich nun auf derartige konzentrierte Lösungen. Von den mit solchen Lösungen verschiedenen Gehaltes koexistenten Hydraten ist erfahrungsmäßig festgestellt, daß die Dampfspannung des Lösungsmittels über denselben sich sprungweise ändert, sodaß bei konstanter Dampfspannung einem wasserreicheren Hydrat Wasser entzogen werden kann, wobei es in das nächst wasserärmere übergeht. Hydratstufen, welche in dieser Beziehung zueinander stehen, sollen *benachbart* genannt werden.

Es sei nun  $U$  und  $F$  die gesamte und die freie Energie einer konzentrierten Lösung, welche bei der Temperatur  $\theta$  mit einem Hydrat koexistiere, das in 1 Gramm  $\alpha$  g Salz und  $\beta$  g

Lösungsmittel enthält. Dieses Hydrat und das Lösungsmittel seien die Komponenten der Lösung und diese sei entstanden durch Mischen von  $z$  g des Hydrats mit  $y$  g Lösungsmittel. Diese  $z$ ,  $y$  und die absolute Temperatur  $\vartheta$ , bei welcher die Lösung sich befindet, bestimmen ihren Zustand, wenn von den Einflüssen des Druckes und anderen äußeren Kräften abgesehen wird. Es bezeichnen ferner  $\xi$  und  $q$  die Gesamt- und freie Energie von 1 g des Hydrats,  $\eta$  und  $\psi$  die Gesamt- und freie Energie von 1 g des Lösungsmittels,  $s$  die spezifische Wärme des Hydrats,  $\sigma$  die spezifische Wärme der Lösung,  $\lambda$  sei die Lösungswärme des Hydrats in der Lösung, d. h. die Wärmetönung beim Auflösen von 1 g des Hydrats in einer beliebig großen Menge der Lösung,  $f$  die isotherme und reversible Arbeit, welche bei diesem Vorgang geleistet werden kann.

Es ist dann:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \xi - \lambda,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = q - f,$$

$$\lambda = l + (s - \sigma) \vartheta,$$

wo  $l$  und  $\sigma$  von der Konzentration  $h = z/y$  abhängen.

Es ist ferner:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} - \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial F}{\partial z},$$

also

$$\xi - \lambda = q - \vartheta \frac{\partial q}{\partial \vartheta} - f + \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

Da nun

$$\xi = q - \vartheta \frac{\partial q}{\partial \vartheta}$$

so ist

$$\lambda = f - \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta},$$

woraus folgt:

$$\frac{l}{\vartheta} - (s - \sigma) \log \vartheta = \frac{f}{\vartheta} + \Phi(h).$$

Für  $\vartheta = \theta$  wird  $f = 0$  und somit

$$f = l \left( 1 - \frac{\vartheta}{\theta} \right) - (s - \sigma) \vartheta \log \frac{\vartheta}{\theta}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial z} = q - l \left( 1 - \frac{\vartheta}{\theta} \right) + (s - \sigma) \vartheta \log \frac{\vartheta}{\theta}.$$

Diese Gleichung gestattet eine ziemliche Anwendung, z. B. kann aus ihr für Lösungen, welche den einfachen Gesetzen des osmotischen Druckes folgen, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die *Konzentration gesättigter Lösungen sich mit der Temperatur ändert.*

Zunächst soll dieselbe benutzt werden, um die elektromotorische Kraft zweier gegengeschalteter Elemente nach dem Typus des Kalomelelementes zu berechnen. Die Lösungen in den beiden Elementen seien im Sinne der oben gegebenen Definition konzentriert und durch die Indizes 1, 2 sollen alle Größen, welche sich auf sie beziehen, gekennzeichnet werden.

Ist  $E$  die elektromotorische Kraft in Volt,  $A$  das elektrochemische Äquivalent des gelösten Salzes,  $x$  die Menge des wasserfreien Salzes, mit welcher die Lösung hergestellt werden kann, und wird Wärme und Arbeit in Voltcoulomb ausgedrückt, so ist:

$$E = A \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{h_1} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{h_2} \right].$$

Nun ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi - r \vartheta \log \frac{p_0}{p},$$

wenn  $p_0$  die Tension des Dampfes über dem reinen Lösungsmittel,  $p$  über der Lösung und  $r$  die Konstante des Dampfes bedeuten und auf diesen die Gasgesetze angewendet werden können.

Es ist sonach

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \beta \psi + \beta r \vartheta \log \frac{p_0}{p} \right]$$

und

$$\begin{aligned} \frac{E}{A} &= \frac{\varphi_1 - \beta_1 \psi}{\alpha_1} - \frac{\varphi_2 - \beta_2 \psi}{\alpha_2} + r \vartheta \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1} \log \frac{p_0}{p_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \log \frac{p_0}{p} \right) \\ &\quad - \frac{l_1}{\alpha_1} \left( 1 - \frac{\vartheta}{\theta_1} \right) + \frac{l_2}{\alpha_2} \left( 1 - \frac{\vartheta}{\theta_2} \right) + \frac{s_1 - \sigma_1}{\alpha_1} \vartheta \log \frac{\vartheta}{\theta_1} \\ &\quad - \frac{s_2 - \sigma_2}{\alpha_2} \vartheta \log \frac{\vartheta}{\theta_2}. \end{aligned}$$

Wenn die beiden Hydrate benachbart sind und  $P$  den Dampfdruck des Lösungsmittels bei ihrer Umwandlung bezeichnet, so ist:

$$\frac{\varphi_1}{\alpha_1} = \frac{\varphi_2}{\alpha_2} - \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \left( \psi - r \vartheta \log \frac{p_0}{P} \right)$$

und

$$\Delta = \frac{\varphi_1 - \beta_1 \psi}{\alpha_1} - \frac{\varphi_2 - \beta_2 \psi}{\alpha_2} = \left( \frac{\beta_2}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) r \vartheta \log \frac{p_0}{P}.$$

Sind die Hydrate nicht benachbart, sondern Zwischenstufen mit den Umwandlungsdrucken  $P, P''$  vorhanden, so wird

$$\Delta = \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta'}{\alpha'} \right) r \vartheta \log \frac{p_0}{P} + \left( \frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\beta''}{\alpha''} \right) r \vartheta \log \frac{p_0}{P'} + \dots$$

Indes dürfte, nach den Löslichkeitskurven zu schließen, dies nur bei wenigen Salzen auftreten, viel häufiger der weit einfachere Fall, daß beide Lösungen mit demselben Hydrat coexistieren.

Für benachbarte Hydrate wird

$$\frac{E}{A} = \frac{l_2}{\alpha_2} - \frac{l_1}{\alpha_1} - \vartheta \left\{ \frac{l_2}{\alpha_2 \theta_2} - \frac{l_1}{\alpha_1 \theta_1} + \log \left( \frac{P}{p_2} \right)^{\frac{r \beta_2}{\alpha_2}} \left( \frac{p_1}{P} \right)^{\frac{r \beta_1}{\alpha_1}} \right. \\ \left. \left( \frac{\vartheta}{\theta_2} \right)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}} \left( \frac{\theta_1}{\vartheta} \right)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}} \right\}.$$

Koexistieren die beiden Lösungen mit demselben Hydrat, so wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta,$$

$$\frac{E}{\alpha A} = l_2 - l_1 - \vartheta \left\{ \frac{l_2}{\theta_2} - \frac{l_1}{\theta_1} + \log \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{r \beta} \left( \frac{\vartheta}{\theta_2} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \left( \frac{\theta_1}{\vartheta} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \right\}.$$

Koexistiert wasserfreies Salz, so wird  $\alpha = 1, \beta = 0$ . Sind die Überführungszahlen für die benutzten Konzentrationen konstant, so erhält man durch Multiplikation mit der Überführungszahl des Anions bez. des Kations die elektromotorische Kraft der Konzentrationsketten erster und zweiter Art.

In diesen Gleichungen kommen nur Größen vor, welche alle unmittelbar gemessen werden können. Sie gestatten also einen beliebig genauen Vergleich mit Beobachtungen und setzen nicht wie die von Helmholtz gegebenen voraus, daß die funktionelle Abhängigkeit des Dampfdruckes von Konzentration bekannt sei, vielmehr sind bloß Messungen an den untersuchten Lösungen selbst erforderlich.

Über die „Konstitution der Lösungen“ geben sie freilich gar keine Aufschlüsse. Wohl aber tritt der Einfluß der *Konstitution* da auf, wo er eine experimentelle Untersuchung zuläßt, in der *Konstitution der Hydrate* und deren Einfluß auf die Löslichkeit.

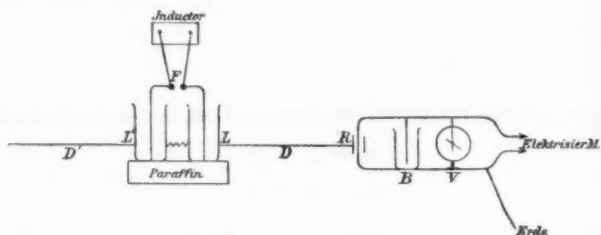
Diese Erscheinungen dürften wohl auch für jede Theorie der Lösung, welche mit der Erfahrung übereinstimmen soll, fundamental sein.

Straßburg, Physik. Inst., Oktober 1902.

(Eingegangen 25. Oktober 1902.)

**9. Über den Einfluß elektrischer Felder  
auf die Funkenentladung und die Zerstreuung  
von Elektrizität (Fortsetzung);  
von Mathias Cantor.**

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich den Einfluß elektrostatischer Felder untersucht, deren Richtung in der Nähe der Elektroden normal zur Entladungsrichtung verläuft. Es hat sich ergeben, daß durch solche Felder das Entladungspotential sehr merklich herabgesetzt wird. Im folgenden sollen einige Versuche mit rasch oszillierenden Feldern beschrieben werden. Die Oszillationen erhielt ich durch die von Braun für drahtlose Telegraphie angegebene Anordnung, welche in der folgenden Figur dargestellt ist.



Die beiden Leydnerflaschen  $L$  und  $L'$  sind isoliert aufgestellt, ihre äußeren Belegungen durch einen Draht von kleiner Selbstinduktion miteinander verbunden. Die inneren Belegungen führen zur Funkenstrecke  $F$ , an welche die Sekundärspule eines Induktors gelegt ist. An die äußeren Belegungen der Flaschen sind die im übrigen isolierten und gleichen Drähte  $D$  und  $D'$  angesetzt, deren Länge auf  $\frac{1}{4}$  der Wellenlänge der bei Entladung der Flaschen entstehenden Schwingungen abgeglichen wird.

Werden die Flaschen durch den Induktor geladen und entladen sie sich durch die Funkenstrecke  $F$ , so erhält man

1) M. Cantor, Ann. d. Phys. 9. p. 452. 1902.



auf  $D$  sehr regelmäßige Oszillationen. Mit diesen wurden nun folgende Versuche ausgeführt:

1. Der Draht  $D$  wurde mit einem isoliert aufgestellten Messingrohr  $R$  verbunden, welches 40 mm lang und 30 mm weit war. In dem Rohr befand sich die schon anlässlich der früher beschriebenen Versuche benutzte kleine Funkenstrecke  $f$ , durch welche sich die Leydner Batterie  $B$  entladen konnte. Parallel zu dieser war das Braun'sche Voltmeter  $V$  geschaltet und mit einer kleinen Influenzmaschine konnte  $B$  langsam bis zum Entladungspotential, welches durch  $V$  angegeben wurde, geladen werden.

Es ergab sich nun dieses, solange keine Schwingungen vorhanden waren, zu

3200 Volt.

Sobald aber Schwingungen erregt wurden, sank das Entladungspotential auf

2100 Volt.

2. Da auf dem Rohr parallel der Achse Strömungen, und dadurch eine Kraft parallel zur Entladungsrichtung neben der normalen Komponente auftreten konnte, so wurde das Rohr ersetzt durch einen aus 4 mm dickem Kupferdraht gebildeten Ring, welcher die Funkenstrecke umschloß.

Auch bei dieser Anordnung zeigte sich derselbe Effekt. Das Entladungspotential sank

von 3200 Volt

auf 2200 Volt,

sobald die Schwingungen erregt wurden.

3. Zwei Kupferscheiben von je 100 mm Durchmesser wurden einander parallel im Abstand von 40 mm isoliert aufgestellt. Die eine Scheibe wurde mit dem Draht  $D$ , die andere mit dem Knopf eines Elektroskopes von Elster und Geitel verbunden, dessen Gehäuse an Erde lag. Wurden die Schwingungen erregt, so zeigte das Blättchen des ungeladenen Elektroskopes einen kleinen schwankenden Ausschlag an, welcher sogleich verschwand, wenn die Schwingungen unterbrochen wurden.

Wurde auf das Elektroskop eine *positive* Ladung gebracht, so behielt es diese auch unter dem Einfluß der Schwingungen bei, es zeigte sich sogar eine kleine, schwankende Zunahme.

*Negative Ladungen aber wurden durch die Schwingungen rasch zerstreut.*

Kommutieren des Induktors hat keinen Einfluß.

Ebensowenig änderte sich die Entladung, wenn eine große Paraffinscheibe zwischen die Scheiben gebracht wurde. Wieweit diese Erscheinungen mit dem sonst beobachteten „leichteren Auströmen“ einer Elektrizität<sup>1)</sup> im Zusammenhang stehen, möchte ich für jetzt nicht entscheiden. Nur sei bemerkt, daß bei allen beschriebenen Versuchen die Spannung des Wechselfeldes so gering war, daß auch im vollständig verdunkelten Raum keine Spur irgend einer Entladungserscheinung sichtbar wurde. —

*Auf den Parallelismus, welchen meine früheren Versuche mit der lichtelektrischen Erscheinung zeigen, habe ich schon hingewiesen. Auch die neuen Versuche scheinen dieselbe Analogie zu bieten.*

Von Wichtigkeit für diese Auffassung ist der Einfluß der Wellenlänge der Schwingungen. Sie betrug bei den beschriebenen Versuchen ca. 100 m und ich beabsichtige diese nun unter Anwendung möglichst kurzer Wellen fortzusetzen.

Strassburg, Physikalisches Institut, 3. Oktober 1902.

---

1) Vgl. F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 473. 1894.

(Eingegangen 25. Oktober 1902.)

# 10. Nebenschlußkasten zum Drehspulgalvanometer; von Wilhelm Volkmann.

Die magnetischen Störungen, die den physikalischen Laboratorien aus der Einführung elektrischer Straßenbahnen erwachsen sind, haben den Drehspulgalvanometern schnell zu großer Verbreitung geholfen. Ohne diesen äußeren Zwang würde wohl die Einführung dieser Instrumente trotz ihrer vielfachen Vorzüge wesentlich langsamer vor sich gegangen sein. Denn sie verlangen in vielen Stücken eine so ganz andere Behandlung, als die dem Physiker längst vertrauten Nadelgalvanometer, daß wohl jeder in der ersten Zeit seiner Bekanntschaft mit ihnen mancherlei Enttäuschungen erlebt. Vor den unangenehmsten Enttäuschungen, die aus unzumutbarer Wahl beim Einkauf entstehen, kann sich jeder leicht bewahren, wenn er die kürzlich erschienene Abhandlung von Diesselhorst<sup>1)</sup> zu Rate zieht, in der etliche weit verbreitete Irrtümer über das Drehspulgalvanometer berichtet sind. Weniger leicht zu vermeiden, wenn auch durchaus nicht unvermeidlich, sind die Unannehmlichkeiten, die in der besonderen Eigentümlichkeit der Dämpfungsverhältnisse des Drehspulgalvanometers ihren Grund haben. Die Dämpfung dieses Instrumentes ist nämlich im höchsten Grade von dem Widerstand des Schließungskreises abhängig. Das hat einerseits die Annehmlichkeit, daß man durch geeignete Auswahl dieses Widerstandes den Gebrauch des Galvanometers unübertrefflich bequem gestalten kann, andererseits ist der rasche Übergang zu anderen Empfindlichkeiten des Instrumentes recht erschwert. Vermindert man nämlich die Empfindlichkeit durch einen vorgelegten Ballastwiderstand, so wird die Dämpfung so verringert, daß man kaum ohne Kurzschlußaste auskommt, immerhin

1) H. Diesselhorst, Ann. d. Phys. 9. p. 458—468. 1902.

ein Handgriff mehr, der Zeit und Aufmerksamkeit erheischt, ganz abgesehen von den nicht selten dabei auftretenden Störungen durch Thermostrome. Sucht man denselben Erfolg durch Nebenschließung zu erreichen, so wird das Galvanometer meist durch die übergroße Dämpfung geradezu unbrauchbar. Da in jedem Falle die Empfindlichkeit des Instrumentes von der Dämpfung abhängt, tritt noch der Übelstand hinzu, daß man die tatsächlich erreichte Empfindlichkeit gar nicht aus den Widerständen allein ausrechnen kann, sondern jedesmal noch das Dämpfungsverhältnis bestimmen muß, oder auf eine direkte Empfindlichkeitsmessung angewiesen ist. Zur Vermeidung dieser Nachteile gibt es nur den einen Weg Nebenschließung und Vorschaltwiderstand in geeigneter Weise zu kombinieren. Wie dies zu geschehen hat, möchte ich im folgenden auseinanderzusetzen.

Eine einwandsfreie, für alle statischen und fast alle ballistischen Anwendungen brauchbare Verminderung der Empfindlichkeit eines Drehspulgalvanometers muß die Dämpfung des Instrumentes und den Widerstand des Stromkreises unverändert lassen. Ganz zu verwerfen ist demnach eine Verminderung der Empfindlichkeit durch Schwächung des magnetischen Feldes (magnetischen Nebenschluß). Es ist vielmehr nur eine geeignete Abänderung der elektrischen Widerstände zur Erreichung des aufgestellten Zieles geeignet. Es sei nach Maßgabe der von Diesselhorst aufgestellten Gesichtspunkte ein Galvanometer vom Widerstande  $G$  ausgewählt und durch Versuche ein Widerstand  $W$  bestimmt, der ein günstiges Dämpfungsverhältnis hervorbringt, ohne von  $G$  übermäßig verschieden zu sein. Es sollen nun durch Anwendung von Nebenschluß- und Vorschaltwiderständen folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Die Empfindlichkeit soll auf  $1/n$  herabgesetzt werden.
2. Die Dämpfung soll unverändert bleiben.
3. Der Widerstand des Stromkreises soll unverändert bleiben.

Da magnetisches Feld und Drehspule unverändert bleiben, kann man Bedingung 2. auch so schreiben:

2. Der Widerstand der Schließung des Galvanometers soll unverändert bleiben.

Die Erfüllung dieser drei Bedingungen erfordert drei Variable, als welche ein Nebenschluß und von ihm aus sowohl nach der Richtung des Galvanometers hin, wie auch nach der anderen Seite je ein Vorschaltwiderstand in Betracht kommen.

Nach der Fig. 1, in der immer nur eins der beiden Löcher 1 und 2 gestöpselt zu denken ist, schreiben sich diese drei Bedingungen für die Bestimmung des Nebenschlusses  $x$  und der Vorschaltwiderstände  $y$  und  $z$  in der Form:

$$(1) \quad x = \frac{G + y}{n - 1},$$

$$(2) \quad y + \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{W + z}} = W,$$

$$(3) \quad z + \frac{G + y}{n} = G.$$

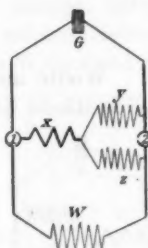


Fig. 1.

Diese Ausdrücke folgen ohne weiteres aus den Sätzen über Stromverzweigung, wobei der dritte durch das Bestehen des ersten sogleich eine Vereinfachung erfahren hat. Am bequemsten isoliert man  $y$  aus der zweiten Gleichung, indem man die  $x$  und  $z$  enthaltenden Brüche mit Hilfe der ersten und dritten Gleichung ausdrückt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W + z} &= \frac{1}{W - y} - \frac{1}{x}, \\ \frac{1}{W + G - \frac{y + G}{n}} &= \frac{1}{W - y} - \frac{n - 1}{G + y}, \\ \frac{1}{W + \left(1 - \frac{1}{n}\right)G - \frac{y}{n}} &= \frac{G - (n - 1)W + ny}{G(W - Gy + Wy - y^2)}, \\ y &= \frac{\left(n - 2 + \frac{1}{n}\right)GW + (n - 1)W^2 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)G^2}{\left(n - \frac{1}{n}\right)G + W}. \end{aligned}$$

$x$  und  $z$  ergeben sich mit Hilfe von  $y$  unmittelbar aus Gleichung (1) und (3).

In dem besonderen Falle, daß  $W = G$  ist, vereinfachen sich die Ausdrücke und es wird:

$$y = \frac{n-2 + \frac{1}{n}}{n - \frac{1}{n}} W,$$

$$x = \frac{W + y}{n - 1},$$

$$z = W - \frac{W + y}{n}.$$

Wollte man sich nach diesen Formeln die erforderlichen Widerstände jedesmal mit Hilfe von Stöpselrheostaten zusammenstellen, so wäre das eine recht umständliche Sache und häufige Irrtümer würden sich nur schwer vermeiden lassen. Der rechte Nutzen dieser Anordnung tritt erst dann hervor, wenn man sie zum Galvanometer passend ein für allemal zusammensetzt. In vorteilhafter Weise läßt sich die Einrichtung für mehrere Empfindlichkeiten in einem Nebenschlußkasten vereinigen nach der Art, wie ich es, freilich noch ohne Rücksicht auf die Dämpfung, vor einiger Zeit vorgeschlagen habe.<sup>1)</sup> Es werden, wie Fig. 2 zeigt, die Nebenschluß- und Vorschaltwiderstände für die Empfindlichkeiten  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  und  $10^{-3}$  neben-

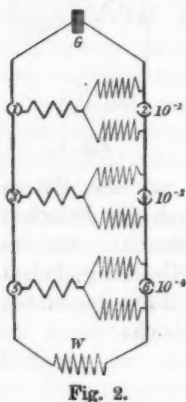


Fig. 2.

bez. hintereinander angeordnet; mit drei Stöpseln kann man nun folgende acht Empfindlichkeiten erzielen:

Stöpsel in			Empfindlichkeit
2	4	6	1
1	4	6	$10^{-1}$
2	3	6	$10^{-2}$
1	3	6	$10^{-3}$
2	4	5	$10^{-4}$
1	4	5	$10^{-5}$
2	3	5	$10^{-6}$
1	3	5	$10^{-7}$

1) W. Volkmann, Elektrotechn. Zeitschr. Heft 33. 1901.

Mit möglichst einfachen Mitteln ist so eine ausgiebige Veränderung der Empfindlichkeit ohne jede Änderung der Dämpfung oder des Widerstandes im Stromkreise erreicht und selbst sehr empfindliche Galvanometer können mit Hilfe dieser Einrichtung schnell nach einem Milliampèremeter geeicht werden. Nicht minder brauchbar ist diese Einrichtung für ballistische Zwecke, da ja für Elektrizitätsmengen die Kirchhoffsche Sätze ihre Geltung behalten. Die einzige, leicht erfüllbare Forderung bei dem Gebrauch eines solchen Nebenschlußkastens ist, daß man dem Stromkreis den Widerstand  $W$  erteilt, für den der Kasten gebaut ist. Die Deckplatte des Kastens hat das Aussehen der Fig. 3, ist also so übersichtlich, daß ein Versehen nicht leicht geschehen kann. Der die Empfindlichkeit angegebende Exponent von 10 ergibt sich durch Zusammenzählen der Exponenten auf den Klötzen, die durch einen Stöpsel mit der Längsschiene verbunden sind. Von zwei in den beiden Längsseiten einander gegenüberstehenden Löchern muß stets eins frei und eins gestöpselt sein. Das Galvanometer wird auf der mit  $G$  bezeichneten Seite eingeschaltet. Hat man den Widerstand  $W$  so gewählt, daß die Dämpfung zu einer raschen Beruhigung des Galvanometers nicht genügt, so kann zwischen den Anschlußklemmen für das Galvanometer und dem ersten Klotz noch ein die beiden Längsschienen überbrückender Kurzschlußaster angebracht werden.

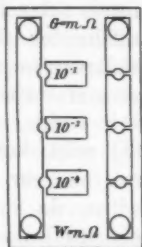


Fig. 3.

Der beschriebene Nebenschlußkasten wird für jeden beliebigen Galvanometer- und Schließungswiderstand von der Spezialfabrik elektrischer Meßapparate Gans & Goldschmidt, Berlin N., Elsasserstraße 8 hergestellt. Diese Firma besitzt für die geschilderte Anordnung der Elemente des Kastens deutschen Reichsgebrauchsmusterschutz.

Berlin, Physik. Kabinett d. landwirtschaftl. Hochschule,  
im Oktober 1902.

(Eingegangen 27. Oktober 1902.)

**11. Über einen Blitzwirbel,  
beobachtet am 15. Juli 1902 über Basel;  
von Fr. Klingelfuß.**

(Hierzu Taf. 1, Figg. 1 u. 2.)

Am 15. Juli abends zwischen 11 und 12 Uhr erhielt ich mittels ruhender photographischer Kamera das Bild einer sehr auffallenden Gewittererscheinung. Dieselbe war vom Baseler Stadtzentrum aus in OSO-Richtung gesehen und verlief nahezu horizontal von N nach S, im Bilde (Fig. 1, Taf. I) von links nach rechts. Das Auge konnte nicht alle Details, die das Bild zeigt, wahrnehmen. Die Entfernung von meinem Standorte bis zur Gegend der Entladung konnte ich nicht feststellen, da infolge anderer, gleichzeitiger Gewitter der zugehörige Donner nicht zu ermitteln war. Das Objektiv war bei dieser Gelegenheit nur einige Sekunden geöffnet, sodaß wahrscheinlich alles im Bilde Ersichtliche ein und derselben Entladung angehört.

Außer einem Bündel paralleler Strahlen (durch Windströmung auseinander gerissener Partialentladungen), wie solche durch das Photogramm von Hrn. Kayser<sup>1)</sup> bekannt geworden sind, enthält das vorliegende Photogramm (Fig. 1, Tafel I) insbesondere noch zwei deutliche, und einen dritten weniger deutlichen Wirbel heller Linien. Außerdem erkennt man in der Richtung der Achse dieser Wirbel eine große Anzahl gestreckt verlaufender heller Linien. Innerhalb der Steighöhe einer Schraubenlinie in den Wirbeln kann man 50—60 parallele Linien zählen.

Eine ganz ähnliche Wirbelbildung, die man bei Entladungen eines Induktoriums unter ganz bestimmten Bedingungen beobachten kann, spricht für die Wahrscheinlichkeit, daß wir es im vorliegenden Falle mit einer wirbelnden Blitzentladung zu tun haben.

1) H. Kayser, Wied. Ann. 25. p. 131. 1885.



Kommt nämlich bei einem Induktorium eine sehr große Elektrizitätsmenge ohne starke Aureole (Flammenbogen) mit möglichst blauen Funken zur Entladung, so bilden sich prachtvolle Wirbel.<sup>1)</sup> Fig. 2, Taf. I zeigt eine Momentaufnahme von etwa 0,05 Sek. Expositionsdauer aus einer solchen Entladung an einem Induktorium für 50 cm Funkenlänge. Je größer die Elektrizitätsmenge in der Entladung ist, um so regelmäßiger werden die Schraubenlinien, was ohne weiteres erklärlich ist. Die Erfüllung der hier genannten Bedingung setzt selbstverständlich eine hohe Frequenz voraus, wie wir sie etwa mit dem elektrolytischen Unterbrecher erreichen können. Dann kommen aber die Wirbel zu stande, welche Richtung die Entladungen auch in Bezug auf das Magnetfeld des Induktoriums, oder des Erdmagnetismus haben mögen. Stereoskopische Momentaufnahmen von weniger als 0,001 Sek. Expositionsdauer zeigen das Bild einer unregelmäßig gewundenen Linie, die sich bald links, bald rechts herumdreht. Beim Flammenbogen bilden sich die Wirbel nicht, was sich durch die höhere Temperatur in demselben erklären läßt, bei der sich die magnetischen Kraftlinien nicht mehr orientieren.

Die hier genannten Bedingungen für das Zustandekommen der Wirbel scheinen nun bei der vorliegenden Blitzentladung in hohem Grade vorhanden gewesen zu sein. Die Entladung zeigt eine außerordentliche Menge Linien, teils in den Wirbeln, teils in gestreckter Bahn, horizontal verlaufend. Jede Linie entspricht mindestens einer Partialentladung. Die regelmäßige Nebeneinanderlagerung der Linien in den Wirbeln läßt auf eine sehr große Elektrizitätsmenge und daher, nach dem Vorhergesagten, auf eine hohe Frequenz in der Entladung schließen. Die hierbei in Frage kommende Elektrizitätsmenge übersteigt ohne Zweifel bei weitem dasjenige Maß, das wir mit den uns zu Gebote stehenden Induktorien erhalten können. Das erklärt auch die größere Regelmäßigkeit der Schraubenlinien, gegenüber den bei Induktorien zu beobachtenden Wirbeln. Günstig mochte im vorliegenden Falle auch das erdmagnetische Feld mitgewirkt haben, da die Magnetfelder der Wirbel damit zusammenfielen.

---

1) E. Ruhmer, *Elektrotechn. Zeitschr.* 21. p. 152. 1900.

Um mir Rechenschaft darüber geben zu können, ob nicht außergewöhnliche magnetische Felder, auf deren zeitweises Vorhandensein aus den starken Ablenkungen der Magnetnadel geschlossen wird<sup>1)</sup>, die Wirbelbildung veranlaßt haben könnten, wandte ich mich brieflich an die schweizerische meteorologische Zentralanstalt in Zürich, sowie an das kgl. meteorologisch-magnetische Observatorium in Potsdam. Erstere Anstalt konnte mir mangels der für diese Beobachtungen nötigen Instrumente die gewünschte Auskunft nicht erteilen. Dagegen erhielt ich vom Vorsteher des Observatoriums in Potsdam in entgegenkommender Weise die nachstehend im Wortlaut wiedergegebene Auskunft: „Ihre Anfrage ist bezüglich *unseres* Observatoriums dahin zu beantworten, daß an diesem Tage weder die erdmagnetischen, noch die luftelektrischen Apparate (bei letzteren wurde — in mäßigem Umfange — nicht nur die Potentialdifferenz, sondern auch die Zerstreuungsfähigkeit beobachtet) irgend ein auffälliges Verhalten gezeigt haben.“

Von besonderem Interesse ist die vorliegende Erscheinung auch deshalb, als sie erkennen läßt, daß die Partialentladungen dieses Blitzes nicht oszillierend sein konnten, sondern pulsierend — gleichgerichtet sein mußten, damit eine Drehung der Strombahnen, wie es hier der Fall zu sein scheint, zu stande kommt.

Basel, im Oktober 1902.

1) Man vgl. Kr. Birkeland, *Expédition Norvégienne de 1899—1900 pour l'étude des aurores boréales etc.* p. 18. 1901. Christiania bei Jacob Dybwad.

(Eingegangen 13. Oktober 1902.)

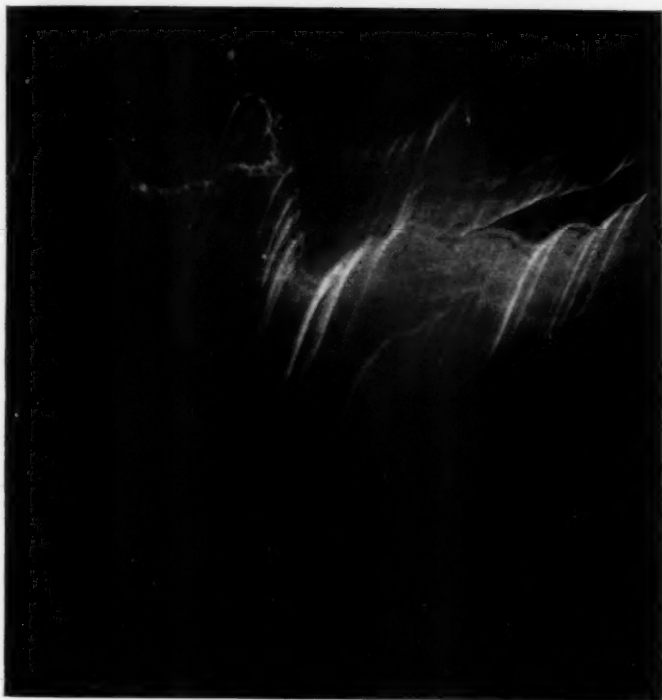


Fig. 1.

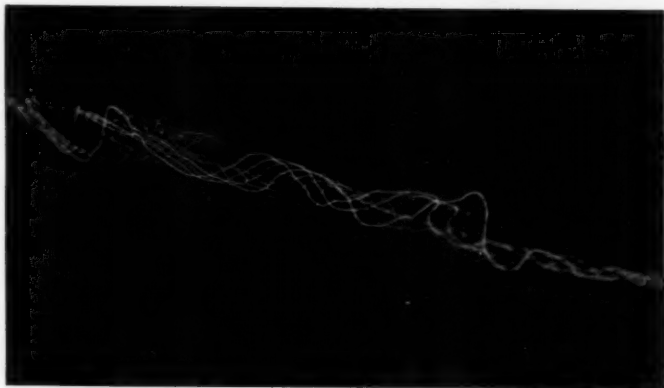


Fig. 2.

Fr. Klingelfuss.

1

s  
n  
li  
li  
V  
g  
in  
P  
L  
u  
g

je  
d  
H  
k  
S  
G  
ve

un  
m

A  
vo

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 10.

1. *Über ein optisches Pyrometer*<sup>1)</sup>;  
von L. Holborn und F. Kurlbaum.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Das optische Pyrometer, das wir hier nebst einigen Arten seiner Verwendung beschreiben wollen, beruht auf der Photometrie einer homogenen Strahlung. Gegenüber den gewöhnlichen photometrischen Methoden, die ein konstantes Vergleichslicht benutzen, wird bei unserem Verfahren die Helligkeit der Vergleichslampe selbst reguliert, die von einem elektrisch geglühten Draht oder Faden gebildet wird, und die Veränderung in einfacher Weise durch die Stärke des Heizstromes gemessen. Prinzipiell ist das Instrument für die Photometrie homogenen Lichtes beliebiger heller Flächen anwendbar. Wir beschränken uns darauf, seinen Gebrauch für die Temperaturmessung glühender Körper zu erläutern.

1. Beschreibung des Apparates.

Als Photometer dient ein einfaches Fernrohr, dessen Objektivlinse  $L_1$  hinter der Öffnung des Diaphragmas  $D$  ein Bild der glühenden Fläche erzeugt, deren Temperatur zu messen ist. Hinter dem Diaphragma befindet sich der Kohlebügel einer kleinen Glühlampe, die in der Figur 1 um  $90^\circ$  gedreht dargestellt ist. Durch die Linse  $L_2$  mit dem vorgesteckten roten Glase  $G$  wird das Bild der leuchtenden Öffnung betrachtet, von welcher sich der Kohlebügel zunächst schwarz abhebt.

Wird der Faden der Glühlampe durch den Strom erhitzt und erreicht die Helligkeit seiner roten Strahlen die der zu messenden Fläche, so verschwindet der Bügel vollständig,

1) Das Pyrometer wurde zuerst in den Sitzungsberichten d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 13. Juni 1901 beschrieben. Es wird von der Firma Siemens & Halske ausgeführt.

während sich seine durch Wärmeableitung gekühlten Schenkel noch von der leuchtenden Fläche abheben.

Diese photometrische Anordnung ist sehr empfindlich, weil sie die Bedingung erfüllt, daß die Grenzkanten der zu ver-

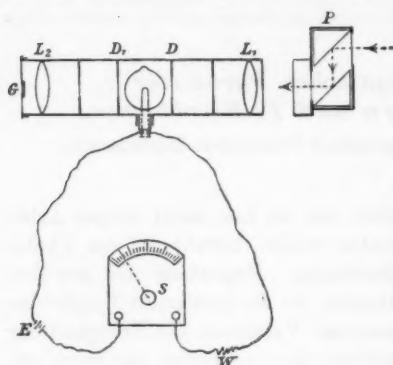


Fig. 1.

gleichenden hellen Flächen vollkommen verschwinden; in der Tat ist man bei richtiger Einstellung nicht im stande, den Ort des Kohlebügels anzugeben. Es macht den Eindruck, als löse sich der Bügel in einer feurigen Flüssigkeit auf, während die kälteren Schenkel noch auf die Stelle hinweisen, auf welche die Aufmerksamkeit zu lenken ist.

Um die Stromstärke der Glühlampe stetig ändern zu können, bringt man in dem Kreise einen Regulierwiderstand  $W$  an, z. B. ein Konstantanband mit Gleitkontakt. Außerdem ist ein Strommesser  $S$  nötig.<sup>1)</sup>

An die optischen Eigenschaften der Linsen werden keine Anforderungen gestellt. Denn einmal wird homogenes Licht benutzt, zweitens kommt von den Linsen nur das mittelste Stück, ungefähr von der Größe der Pupille, zur Verwendung. Deshalb genügen als Objektiv und Okular Brillengläser mit den Brennweiten 12 und 20 cm. Ferner braucht man das Objektiv nicht scharf auf den zu messenden glühenden Körper einzustellen, da die Flächenhelligkeit für das beobachtende Auge hiervon nicht abhängt. Dagegen muß das Okular ein deutliches Bild des Bügels liefern.

Der Kohlefaden der Glühlampe läßt sich natürlich auch durch einen elektrisch geglühten Metalldraht ersetzen. Anfangs haben wir einen solchen aus Platiniridium verwendet,

1) Bei der von der Firma Siemens & Halske konstruierten Form ist der Regulierwiderstand mit dem Stativ des Fernrohres fest verbunden.

der jedoch den Nachteil hatte, daß sich sein Querschnitt und seine Oberfläche schon bei etwa  $1200^{\circ}$  merklich durch Zerstäubung änderten. Die Glühlampe ist deshalb vorzuziehen, umso mehr als die optische Erscheinung durch die kugelförmige Glashülle nur wenig leidet. Luftbläschen, die im Glase als schwarze Punkte auf hellem Grunde erscheinen, sind, wenn sie nicht gerade am Bügel liegen, gleichgültig.

Für die Einfachheit des Apparates ist es besonders wichtig, wenn man eine spektrale Zerlegung des Lichtes vermeiden und mit farbigen Gläsern auskommen kann. Damit das Photometer möglichst bis zur dunklen Rotglut herunter brauchbar ist, muß man Licht von langer Wellenlänge, also rotes Glas zur Absorption benutzen. Wir haben Kupferoxydulglas verwendet, das zugleich von allen farbigen Gläsern das homogenste Licht liefert. Für andere Zwecke (siehe unten) brauchten wir noch ein grünes und ein blaues Glas, sowie ein Rauchglas. Alle diese Gläser sind uns von dem Glaswerk Schott & Genossen bereitwilligst zur Verfügung gestellt worden.<sup>1)</sup> Die farbigen Gläser haben folgende Durchlässigkeit:

	Grenzen		Schwerpunkt
Rot	0,694	0,602	0,643 $\mu$
Grün	0,656	0,446	0,550
Blau	0,513	0,396	0,474

Das Kupferoxydulglas wird in der Dicke von 2 mm vor das Okular des Photometers gesteckt. Bei etwa  $1200^{\circ}$  verdoppelt man die Dicke wegen der großen Lichtintensität, indem man ein zweites Glasscheibchen vorsetzt, während unterhalb  $800^{\circ}$  gar kein farbiges Glas benutzt wird. Denn die Lichtquellen sind in dem unteren Temperaturgebiet homogen genug, das rote Glas beeinträchtigt hier die Empfindlichkeit der Einstellung. Man kann alsdann bis etwa  $650^{\circ}$  hinunter messen, ein Vorteil, den Photometer mit spektraler Zerlegung und Polarisationsseinrichtungen nicht bieten.

Übersteigt die zu messende Helligkeit die der Glühlampe, so wird eine Lichtschwächung vor dem Objektiv angebracht.

1) Die farbigen Gläser von bestimmter Zusammensetzung gehören zu denen, über die R. Zsigmondy berichtet (Zeitschr. f. Instrumentenk. 21. p. 97. 1901). Das rote Glas ist mit Nr. 2745, das grüne mit 431 III, das blaue mit Nr. 3086 und das Rauchglas mit Nr. 444 III bezeichnet.

Rauchgläser lassen meistens rotes Licht besser durch als blaues. Am besten bewährte sich das vom Jenaer Glaswerk bezogene Glas, das wir in zwei Dicken benutzten. Die Schwächung durch eine doppelte Reflexion, die mit zwei vor dem Objektiv angebrachten Reflexionsprismen *P* bewirkt wurde, ergab im allgemeinen bessere Resultate. Die Prismen sind in einem vor das Objektiv zu steckenden Messingkasten derartig befestigt, daß die einfallenden Lichtstrahlen keine Änderung ihrer Richtung, sondern nur eine seitliche Verschiebung erleiden.

## 2. Vergleich mit der schwarzen Strahlung.

Als Normalkörper für die Strahlung dient der glühende schwarze Körper, dessen Temperatur mit dem Thermoelement gemessen wird. Für eine Reihe von Temperaturen bis  $1500^{\circ}$  hinauf bestimmt man die Stromstärke, bei welcher die Glühlampe ebenso hell erscheint wie der schwarze Körper, konstruiert hiernach eine Kurve und kann dann rückwärts aus der gemessenen Stromstärke die Temperatur angeben. Durch diese Vergleichung mit dem schwarzen Körper wird der Apparat ein absolutes Photometer, dessen Angaben sich auf die Helligkeit der schwarzen Strahlung von verschiedener Temperatur beziehen.

Als schwarzen Körper benutzten wir meistens den von Lummer und Kurlbaum<sup>1)</sup> angegebenen mit elektrischer Heizung; vielfach fand auch ein kleinerer von ähnlicher Form Anwendung, welcher für unsere Zwecke dieselben Ergebnisse lieferte.

Da die Heizung beider Körper ohne die Gefahr einer schnellen Abnutzung höchstens bis  $1500^{\circ}$  gesteigert werden kann, so muß man bei der Messung von höheren Temperaturen die Vergleichskurve nach dem Strahlungsgesetz extrapolieren. Nun ist schon bei etwa  $1900^{\circ}$  die Temperatur erreicht, die man bei dem Brennen der Glühlampe einzuhalten pflegt und die im Interesse der Haltbarkeit der Lampe nicht überschritten werden darf. Sicherer geht man offenbar, wenn die Lampen noch weniger hoch beansprucht werden. Wir haben sie deshalb meistens nur bis  $1500^{\circ}$  erhitzt und die zu messende

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.



Helligkeit von dieser Temperatur ab in bekanntem Verhältnis geschwächt. Auf die mit Lichtschwächung gemessenen Temperaturen läßt sich das Wiensche Gesetz anwenden (s. unten). Sie bilden eine neue Kurve, wenn man sie als Funktion der zugehörigen Stromstärken der Glühlampe aufträgt.

Die Kurven liefern ihrer Herleitung gemäß nur für schwarze Körper die Temperatur in der Celsiusskale. Es trifft dies bei vielen Anwendungen zu, bei denen die Temperatur von geschlossenen Öfen zu messen ist. Wird jedoch das Verfahren auf die Messung von Körpern von geringerem Strahlungsvermögen, z. B. freistrahenden blanken Metalloberflächen, angewandt, so bestimmt man nicht die Temperatur nach der Celsiusskale, sondern diejenige, welche der gleich helle schwarze Körper besitzen muß. Wir wollen sie kurz „*schwarze Temperatur*“ nennen und mit  $S$  bezeichnen. Die Skale der schwarzen Temperaturen für eine bestimmte strahlende Oberfläche, ebenso wie die der Celsiusskale genau definiert und reproduzierbar, unterscheidet sich jedoch von ihr je nach dem Strahlungsvermögen des zu messenden Körpers. Will man die eine Skale in die andere überführen, so ist demnach der Unterschied der Strahlungsvermögen zu messen.

Dies kann ebenfalls mit unserem Photometer geschehen, wobei man den Unterschied der Helligkeiten in Temperaturgraden des schwarzen Körpers erhält. Bei einer solchen Darstellungsweise gestalten sich außerdem alle Beziehungen einfacher und übersichtlicher als wenn man mit den Helligkeiten selbst rechnet.

### 3. Abhängigkeit der Temperatur von der Stromstärke eines elektrisch geheizten Körpers.

Ein großer Vorteil des Pyrometers liegt darin, daß die Stromstärke der Glühlampe erfahrungsgemäß in einfacher Weise von der zu messenden Temperatur abhängt, sodaß man die Lampe nur an einigen Punkten mit dem schwarzen Körper zu vergleichen braucht; vgl. hierüber das folgende.

*Elektrische Öfen.* Von einer gewissen Temperatur an gelten ähnliche einfache Beziehungen nicht nur für einen elektrisch geglühten Draht oder Faden, sondern im allgemeinen für alle elektrische Öfen, die durch Joulesche Wärme gespeist werden.

Hierher gehören alle Formen des schwarzen Körpers, die zur Verwendung kamen. Als Beispiel möge hier ein solcher mit besonders großer Öffnung (3 cm) angeführt werden, den wir anfangs benutzten und der im Gegensatz zu den oben erwähnten nicht durch einen zylinderförmigen Platinschlauch, sondern durch eine Spule aus Platinband geheizt wurde. Er hatte eine Länge von 12 cm und einen äußeren Durchmesser von 11 cm.

Tab. I enthält die Werte des Heizstromes  $J$  für verschiedene Temperaturen  $t$ , die an zwei Beobachtungstagen am Thermoelement während des stationären Zustandes abgelesen wurden. Dieser tritt wegen der geringen zu erwärmenden Masse verhältnismäßig schnell ein.

Tabelle I:

$J$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.	$J$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.
3,49	128°	—	9,92	756°	753°
4,28	236	—	11,62	948	953
6,54	387	—	13,00	1103	1111
8,01	586	540°	14,57	1303	1291
10,06	775	775	16,21	1478	1478
13,15	1127	1129			

Zwischen  $J$  und  $t$  besteht von 500° aufwärts die Beziehung

$$J = 3,300 + 0,008728 t.$$

Die letzte Columne der Tab. I enthält die aus dieser Formel berechneten Werte von  $t$  für die beobachteten Zahlen von  $J$ .

Ein zweites Beispiel gewährt keine so große Genauigkeit der Beobachtung, weil die Herstellung des stationären Zustandes wegen der viel größeren Masse des Ofens eine ungleich längere Zeit beanspruchte. Wir führen es hier an, um die angenäherte Gültigkeit einer einfachen Beziehung unter ganz anderen Bedingungen zu zeigen. Es handelt sich um einen 80 cm langen Ofen, der sonst für die Bestimmung der Ausdehnung von halbmeterlangen Stäben dient. Er besteht aus drei konzentrischen dicken Porzellan- bez. Chamotteröhren, von denen die innerste durch eine Nickelspule elektrisch geheizt wird. Tab. II gibt die Stärke  $J$  des Heizstromes für verschiedene

Werte der Temperatur  $t$ , welche in der Mitte des Heizrohres gemessen wird.

Tabelle II.

$J$ (Amp.)	$t$	$J$ (Amp.)	$t$
13,5	250°	27,5	750°
16,5	375	31,2	875
20,3	500	34,5	1000
24,2	625		

Im Mittel bewirkt also eine Vermehrung der Stromstärke um je 2,8 Amp. mit nur 0,4 Amp. Abweichung eine Temperaturerhöhung um 100°.

*Photometrische Messungen.* Ferner seien hier einige Beispiele für die photometrische Vergleichung eines Platiniridiumdrahtes und einiger Glühlampen mit dem schwarzen Körper angeführt. Tab. III enthält die Beobachtungen mit einem Platiniridiumdraht von 0,3 mm Durchmesser, der horizontal in einer freien Länge von 5,5 cm quer durch das Gesichtsfeld gespannt war. Störend war bei dieser Anordnung, daß sich der Draht infolge der Ausdehnung in hoher Temperatur stark durchbog, sodaß er an den Rand des Gesichtsfeldes kam. Man kann diesen Nachteil durch eine bügelartige Anordnung vermeiden, muß aber dann größere Unregelmäßigkeiten durch den aufsteigenden Luftstrom in Tausch nehmen.

Tabelle III.

$$i = 1,321 + 0,003513 t.$$

$i$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.
3,56	635°	637°
3,93	745	743
4,30	848	848
4,63	946	942
5,17	1100	1096
5,25	1114	1118

$i$  bedeutet die Temperatur des schwarzen Körpers und  $i$  die Stromstärke des Platiniridiumdrahtes von gleicher Hellig-

keit. Die Abweichungen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von  $t$  fallen in die Grenze der Beobachtungsfehler.

Die Stromstärke der Glühlampe kann als quadratische Funktion der schwarzen Temperatur  $S$  dargestellt werden. Die folgende Tabelle bezieht sich auf die Form der 4-Volt-lampe mit bügelförmigem Kohlefaden, die wir bisher für das Pyrometer stets verwendet haben.

Tabelle IV.

Lampe Nr. 40.

$$i \cdot 10^3 = 170 + 0,1600 t \\ + 0,0001333 t^2.$$

$i$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.
0,340	686,5°	679°
0,375	778	778
0,402	844	850
0,477	1026	1032
0,552	1196,5	1196
0,631	1354	1354
0,712	1504	1504

Lampe Nr. 23.

$$i \cdot 10^3 = 139,3 + 0,2135 t \\ + 0,0001212 t^2.$$

$i$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.
0,360	728°	730°
0,438	919	918
0,515	1091	1087
0,612	1281	1281
0,727	1490	1491

Lampe Nr. 24.

$$i \cdot 10^3 = 227,1 + 0,04601 t + 0,0001911 t^2.$$

$i$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.	$i$ (Amp.)	$t$ beob.	$t$ ber.
0,380	778°	782°	0,569	1220°	1223°
0,382	784	788	0,637	1345	1348
0,407	862	858	0,638	1354	1350
0,477	1029	1029	0,722	1490	1493
0,553	1194	1190	0,733	1516	1511

#### 4. Haltbarkeit der Glühlampen.

Die Versuche über die Haltbarkeit der Glühlampen sind noch nicht abgeschlossen, lassen jedoch erkennen, daß sich eine hinreichende Konstanz erzielen läßt, wenn die Lampen, ehe man sie in Gebrauch nahm, etwa 30 Stunden lang bei etwa 1900° (mit 4 Volt kurz geschlossen) gebrannt hatten.

Als dann wurden wenigstens keine merklichen Änderungen mehr beobachtet, wenn die Lampen von da ab nur auf die Temperatur von  $1500^{\circ}$  erhitzt wurden, wie es bei der photometrischen Vergleichung zu geschehen pflegt. Die folgende Zusammenstellung zeigt die Dauerversuche für einige Lampen, die nach mehrstündigem Brennen bei  $1900^{\circ}$  dann wiederholt bei  $1100^{\circ}$  mit dem schwarzen Körper verglichen worden waren.

für Lampe	i (Amp.) bei $1100^{\circ}$		
	Nr. 102	Nr. 104	Nr. 105
Nach 20stündg. Brennen bei $1900^{\circ}$	0,608	0,592	0,589
" 5 " " " $1900$	0,613	0,592	0,592
" 5 " " " $1900$	0,621	0,597	0,597
" 5 " " " $1900$	0,622	0,599	0,600
" 20 " " " $1500$	0,622	0,599	0,601

Bei den pyrometrischen Messungen wird man die Glühlampe natürlich nur während der Zeit der Messung eingeschaltet lassen, um den Glühfaden nicht unnötig abzunutzen. Vor der eigentlichen Einstellung muß die Lampe jedoch schon etwa 1 bis 2 Minuten gebrannt haben, wenn sie ihren stationären Helligkeitszustand erreicht haben soll.

#### 5. Messung der Lichtschwächung.

Die Lichtschwächung der Reflexionsprismen und zweier Rauchgläser wurden mit dem Pyrometer gemessen. Zu diesem Zweck richteten wir auf den schwarzen Körper, der auf eine hohe Temperatur geheizt war, das Photometer, vor dessen Objektiv die Vorrichtung zur Lichtschwächung gesteckt und dessen Glühlampe vorher ohne Lichtschwächung mit dem schwarzen Körper verglichen war. Auf diese Weise wurde die schwarze Temperatur  $S_2$  der geschwächten Strahlung bestimmt. Die Temperatur  $S_1$  der ungeschwächten Strahlung gab das Thermoelement im schwarzen Körper an. Das Schwächungsverhältnis  $\varphi$  ist sodann aus dem Wienschen Gesetz zu berechnen, das nach der Untersuchung von Paschen und Wanner<sup>1)</sup> sowie

1) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5 1899; H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

von Lummer und Pringsheim<sup>1)</sup> für die leuchtende Strahlung mit hinreichender Genauigkeit gültig ist. Demnach folgt

$$\log \text{nat } \varphi = \frac{C}{\lambda} \frac{S_1 - S_2}{(S_1 + 273)(S_2 + 273)}.$$

Hier ist  $C = 14500$  und  $\lambda$  für das benutzte rote Glas  $= 0,643$ .

*Prismensatz.* Für den spiegelnden Prismensatz ist die Beobachtung an verschiedenen Tagen bei den Temperaturen  $S_1 = 1200, 1350$  und  $1500^\circ$  ausgeführt (Tab. V).

Tabelle V.

$S_1$	$S_2$	$S_1$	$S_2$	$S_1$	$S_2$
1220,5°	824°	1344,3°	894°	1491,4°	965°
1213,4	817	1339,0	882	1494,0	964
1206,3	817	1354,3	895	1498,0	964
1216,0	828	1353,8	895	1491,7	966
1203,0	817	1352,3	895	1492,1	967
1194,4	809	1354,5	892	1499,0	966
Mittel 1208,9°	818,7°	1394,7°	892,2°	1494,4°	965,3°

Hieraus folgt

$\log \text{nat } \varphi$	$\varphi$
5,4391	230,3
5,4565	234,3
5,4518	233,2
Mittel 5,4511	233

Bei der Mittelbildung ist der erste Wert nur mit dem halben Gewicht eingesetzt, weil die Genauigkeit bei der Messung der untersten Temperatur (mit rotem Glas) geringer ist.

Unter Benutzung des Prismensatzes läßt sich die Temperaturmessung bis auf  $2800^\circ$  treiben, ohne daß die Glühlampe über  $1500^\circ$  zu brennen braucht. Mit Hülfe von mehr

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. der Deutschen Physik. Gesellsch. 3. p. 36. 1901.

Spiegelungen kann man beliebig weit gehen. So gibt ein Satz von drei Prismen, deren spiegelnden Ebenen unter Winkeln von  $60^\circ$  einander schneiden, damit das Licht nicht aus dem Visionsradius abgelenkt wird, eine Schwächung von etwa 8000 und könnte unter der angegebenen Bedingung bis zu  $6000^\circ$  benutzt werden.

*Rauchgläser.* Tab. VI enthält die Messungen bei  $S_1 = 1350$  und  $1500^\circ$  mit den beiden Rauchgläsern Nr. 3 und 4, von denen das erste auf eine Dicke von 5,00 mm, das andere auf 4,00 mm abgeschliffen war. Die einzelnen Bestimmungen wurden an verschiedenen Tagen angestellt und zeigen größere Abweichungen voneinander als bei dem Prismensatz.

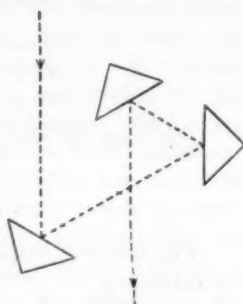


Fig. 2.

Tabelle VI.

Nr. 3				Nr. 4			
$S_1$	$S_2$	$S_1$	$S_2$	$S_1$	$S_2$	$S_1$	$S_2$
1354,0°	887°	1495,8°	966°	1354,7°	954°	1494,5°	1038°
1353,5	876			1353,4	944		
1353,3	884			1352,8	946		
1355,1	876			1334,6	952		
1338,5	874						
Mittel 1350,9°	879,4°	1496,5°	950,5°	1348,7°	949,0°	1493,3°	1030,0°

Hieraus folgt

Nr. 3		Nr. 4	
lognat $\varphi$	$\varphi$	lognat $\varphi$	$\varphi$
5,682	293,4	4,548	94,5
5,687	295,1	4,539	93,7
Mittel 5,685	294	4,544	94,2

Für eine Glasdicke von 1 mm ergeben sich die übereinstimmenden Werte

	lognat $\varphi$	$\varphi$
Nr. 3	1,137	3,12
Nr. 4	1,138	3,12

Das Glas ist also sehr gleichmäßig.

#### 6. Selektive Emission.

Für manche Aufgaben ist es erwünscht, die Temperatur der Strahlung für verschiedene Farben zu kennen, um daraus auf das selektive Emissionsvermögen der Strahlungsquelle zu schließen. Soweit eine Zerlegung mit farbigen Gläsern hierüber Aufschluß geben kann, ist eine solche Bestimmung mit unserem Photometer leicht auszuführen. Zu diesem Zweck läßt sich das rote Glas vor dem Okular durch ein grünes oder ein blaues ersetzen. Die Vertauschung wird mit einer Revolverscheibe am Okular vorgenommen, welche die verschiedenen Gläser trägt. Natürlich gehen das grüne und das blaue Glas nicht zu so tiefen Temperaturen herunter, wie das rote. Das blaue ist erst von 1200° an brauchbar, während das grüne noch bis 800° abwärts Einstellungen gestattet.

*Schwarzer Körper.* Bei Einstellungen auf den schwarzen Körper macht es keinen Unterschied, welches Glas vor dem Okular sitzt. Selbst bei der höchsten Temperatur von 1500° geben die verschiedenen Lichtarten keine merkliche Abweichung.

*Metalle.* Andere Resultate ergibt die Photometrie von freistrahrenden blanken Metallflächen. Ein elektrisch geglühtes Platinblech, dessen rote Strahlung dieselbe ist, wie die vom schwarzen Körper bei 1500° ausgesendete, liefert mit dem grünen Glas eine um 40°, mit dem blauen eine um 75° höhere Einstellung. Auch bei tieferer Temperatur lassen sich schon die Unterschiede zwischen roter und grüner Strahlung messen. So erhält man für das grüne Licht z. B. bei Silber und Gold, wenn ihre rote Strahlung einer schwarzen Temperatur von 775° entspricht, eine um 23, bez. 50° höhere Einstellung.



*Auerlicht.* Ferner ist eine Einstellung auf das Auerische Gasglühlicht erwähnenswert, aus dessen selektiver Emission Le Chatelier und Boudouard die günstige Ökonomie dieser Lichtquelle erklären.<sup>1)</sup> Die Messung ist allerdings wegen der netzförmigen Struktur des Strumpfes schwierig. Wir haben ziemlich auf den Rand des Glühkörpers eingestellt, wo die einzelnen Maschen fast als zusammenhängende Fläche erscheinen. Für das rote Licht wurde hier  $S = 1420^\circ$  gemessen, während grün um 90 und blau um  $160^\circ$  höher lag, das heißt die aus dem Cylinder austretende Strahlung besaß im roten Licht dieselbe Helligkeit, im grünen die 2,2 fache und im blauen die 4,8 fache wie der schwarze Körper bei  $1420^\circ$ .<sup>2)</sup>

*Lichtschwächungen.* Schwächt man die Strahlung des schwarzen Körpers durch die oben erwähnten Vorrichtungen, so ist die geschwächte Strahlung nicht mehr schwarz. Die Erscheinung ist bei der Spiegelung an den Prismen auffällig. Hier gab z. B. die Einstellung für rot  $965^\circ$  und für grün  $1020^\circ$ . Bei der Absorption durch die Rauchgläser ist die Abweichung zwischen roter und grüner Strahlung weniger merklich und sie liegt außerdem nach der entgegengesetzten Seite. Jedenfalls steht man aber auch hier nach Wegnahme des roten Glases vor der Schwierigkeit der farbigen Photometrie. Man darf deshalb bei den schwachen Helligkeiten das rote Glas nicht weglassen, sobald man mit der geschwächten schwarzen Strahlung arbeitet.

#### 7. Bestimmung von Schmelzpunkten.

Mit dem optischen Pyrometer haben wir die Schmelzpunkte von einigen Metallen nach einer Methode zu bestimmen gesucht, die gleichsam eine Umkehrung von der Darstellung der Siemensschen Lichteinheit ist.<sup>3)</sup> Diese wird durch die Lichtstärke dargestellt, die ein elektrisch geglühtes Platinblech

1) H. Le Chatelier u. O. Boudouard, Compt. rend. 126. p. 1861. 1898.

2) Über die spektrale Zusammensetzung des Auerlichtes vgl. auch E. Köttingen, Wied. Ann. 53. p. 800. 1894; W. Nernst u. E. Bose, Physik. Zeitschr. 1. p. 289. 1900.

3) W. Siemens, Elektrotechn. Zeitschr. 5. p. 244. 1884.

im Moment des Durchschmelzens aussendet. Kleine Änderungen in der Durchschmelztemperatur, die durch Spannungen und ungleichmäßige Dicke der Bleche entstehen können, bewirken große Wechsel in der Helligkeit, sodaß dem Gebrauch der Lichteinheit große Schwierigkeiten gegenüberstehen.<sup>1)</sup> Es ließ sich aber erwarten, daß wenn man umgekehrt die Helligkeit beim Durchschmelzen photometriert, daraus die Schmelztemperatur mit größerer Sicherheit abzuleiten ist. Es kommt hinzu, daß dies Verfahren hauptsächlich für die höchsten Temperaturen besonderen Wert besitzt, wo wegen des Mangels an besseren Methoden vorläufig auch eine mäßige Genauigkeit einen Fortschritt bedeutet.

Die Beobachtung ist sehr einfach. Ein Blechstreifen von einigen Millimetern Breite, der durch einen innen und außen geschwärzten Blechkasten gegen Luftströmungen geschützt ist, wird allmählich durch einen immer mehr verstärkten elektrischen Strom erhitzt. Gleichzeitig steigert man die Stromstärke der Glühlampe im Photometer, mit dem man durch ein Loch im Kasten auf das Blech sieht, in demselben Tempo, sodaß der Bügel des Kohlefadens immer unsichtbar bleibt, bis das Blech durchschmilzt. Man hat alsdann nur den Strommesser der Lampe abzulesen, um aus ihrer Vergleichskurve mit dem schwarzen Körper die schwarze Temperatur des Schmelzpunktes entnehmen zu können.

In Tab. VII sind die Beobachtungen zusammengestellt, die mit zwei Lampen an Platin und Palladium ohne Lichtschwächung angestellt wurden.

$i$  bedeutet die Stromstärke der Lampe im Augenblick des Durchschmelzens und  $S$  die daraus berechnete „schwarze“ Temperatur. Die freie Länge der erhitzten Bleche betrug 30 bis 110, die Breite 7 bis 10 und die Dicke immer 0,015 mm bis auf die zweite Beobachtungsreihe vom 7. Februar, wo 0,024 mm dicke Platinstreifen durchgeschmolzen wurden.

Die Schmelztemperaturen sind so konstant, daß man sie statt der Vergleichung mit dem schwarzen Körper als Fixpunkte für das optische Pyrometer verwenden kann.

1) Tätigkeitsbericht d. Phys.-Techn. Reichsanst.; Zeitschr. f. Instrumentenk. 13. p. 120. 1893.

Tabelle VII.

	Lampe	<i>i</i>	<i>S</i>	<i>S</i> (Mittel)
Platin				
19. November	Nr. 40	0,730	1536°	1548°
		0,740	1554	
		0,736	1546	
		0,740	1554	
19. November	Nr. 40	0,736	1546	1548
		0,732	1540	
7. Februar	Nr. 24	0,753	1544	1548
		0,753	1544	
		0,759	1553	
		0,759	1553	
		0,759	1553	
		0,751	1540	
8. Februar	Nr. 40	0,730	1536	1543
		0,741	1555	
		0,731	1538	
Palladium				
8. Februar	Nr. 40	0,653	1394°	1394°
		0,656	1399	
		0,650	1388	
	Nr. 24	0,665	1397	1398
		0,666	1399	

## 8. Unterschied der Strahlung von Platin und schwarzem Körper.

Der Unterschied der an einem schmelzenden Metalle gefundenen „schwarzen“ Temperatur gegen die Celsiusskale gibt die Abweichung der Metallemission von der schwarzen Strahlung (im roten Licht). Nimmt man nach den bisher vorliegenden, freilich noch wenig sicheren Bestimmungen den Schmelzpunkt des Platins zu 1780° C. an, so wäre der schwarze Körper bei derselben Helligkeit um 235° kälter.

Dieser Unterschied zwischen Platinstrahlung und schwarzer Strahlung läßt sich mit unserem Pyrometer auch unterhalb des Schmelzpunktes messen, wenn man ein glühendes Platinblech photometriert. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt

nur in der Temperaturmessung (in der Celsiuskale) des freistrahenden Metallbleches und in der Definition seiner Oberfläche. Wir teilen hier einige Beobachtungsreihen mit, die wir mit der Anordnung von Lummer und Kurlbaum<sup>1)</sup> angestellt haben. Das elektrisch geglühte Platinblech bildet hier einen Kasten, in dem sich die Lötstelle eines Thermoelementes befindet.

In Tab. VIII sind zwei Serien von Vergleichen aufgeführt; die Reihenfolge der Beobachtungen ist durch Nummerierung angegeben.  $i$  bezeichnet die Stromstärke der Glühlampe Nr. 40 des auf den Platinkasten gerichteten Photometers,  $S$  die daraus berechnete schwarze Temperatur und  $t$  die Temperatur (in Celsius), welche das Thermoelement im Platinkasten angibt.

Tabelle VIII.

Nr.	$i$ (Amp.)	$S$	$t$	$t - S$
21	0,827	641°	681°	40°
1	0,862	742	792	50
8	0,869	760	817	57
12	0,871	767	815	48
20	0,873	771	818	47
11	0,423	902	979	77
2	0,424	905	979	74
19	0,425	907	972	65
13	0,430	919	988	69
10	0,487	1054	1149	95
3	0,488	1056	1150	94
18	0,489	1058	1153	95
14	0,490	1061	1158	97
4	0,569	1230	1361	131
9	0,569	1230	1363	133
17	0,570	1232	1369	137
15	0,574	1240	1370	130
5	0,663	1413	1571	158
6	0,666	1418	1574	156
7	0,666	1418	1575	157
16	0,666	1418	1573	155

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. der Physik. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898; O. Lummer u. E. Pringsheim, l. c.

Der Unterschied  $t - S$  ist innerhalb der Versuchsfehler (etwa  $10^\circ$ ) in dem beobachteten Intervall eine lineare Funktion von  $t$ . Oberhalb dieses Gebietes müßte  $S - t$  schneller ansteigen, wenn bei  $t = 1780^\circ$  der Werth  $235^\circ$  erreicht werden soll.

Die Strahlung des Palladiums stimmt mit der des Platins ziemlich überein, während Silber im roten Licht hinter beiden zurückbleibt. Wir gehen hierauf nicht näher ein, da es uns hier nur darauf ankam, Beispiele für die Anwendung unseres Apparates zu geben, wollen jedoch noch einen Versuch erwähnen, den man mit dem Palladiumkasten anstellen kann, um den Unterschied in dem Strahlungsvermögen einer blanken und einer oxydierten Metallfläche zu demonstrieren.

Die Oberfläche des Palladiums überzieht sich bekanntlich bei gelinder Erhitzung mit einer dunklen Oxydhaut, die bei  $800^\circ$  wieder verschwindet. Hat man daher den Palladiumkasten längere Zeit durch den elektrischen Strom auf dunkler Rotglut gehalten, so ist seine Oberfläche vollständig mit Oxyd überzogen. Wenn nun der Heizstrom durch Verkleinerung des Ballastwiderstandes langsam vergrößert wird, so steigt die Temperatur des Palladiumkastens ebenfalls allmählich an. Sobald man auf diese Weise die Zersetzungstemperatur des Oxyds erreicht hat, verändert man den Stromkreis nicht weiter. Trotzdem steigt alsdann die Temperatur wegen der Abnahme der gesamten Strahlung rapide über  $200^\circ$ . Die Stromstärke wird hierbei infolge der Widerstandszunahme des Palladiumkastens sogar kleiner.

(Eingegangen 5. November 1902.)

## 2. *Über den Einfluß der Phasen auf die Klangfarbe; von Franz Lindig.*

[Auszug aus der Kieler Dissertation, I. Teil <sup>1)</sup>.]

### Historischer Überblick und Ergebnisse der Arbeit.

Die Frage, ob beim Zusammenklingen mehrerer Töne deren gegenseitiger Phasenunterschied die Klangfarbe beeinflusse, ist zum ersten Male von H. v. Helmholtz aufgeworfen worden und seitdem der Gegenstand vieler Forschungen gewesen. Ihre Lösung hat sowohl für die Physik, wie auch für die Physiologie die größte Bedeutung; denn von ihrer Beantwortung hängt die Entscheidung ab, wie man die Gehörempfindungen erklären bez. den menschlichen Gehörapparat in seinen einzelnen Teilen deuten will.

*Hat die Phase keinen Einfluß* auf die Klangfarbe, so reagiert das Ohr nur auf die *einzelnen Sinusbestandteile* der zusammengesetzten Schallwelle; *hat sie aber Einfluß*, so kommt auch die *Form der Gesamtwelle* bei der Wahrnehmung zu Gehör. Danach wird sich also auch die Vorstellung über unseren Gehörapparat modifizieren müssen.

Die Literatur über diesen Gegenstand beginnt mit den grundlegenden Arbeiten von v. Helmholtz <sup>2)</sup> aus den Jahren 1863 und folgenden.

Daran schließen sich später die Untersuchungen von Dr. R. König <sup>3)</sup>, Lord Kelvin <sup>4)</sup> und Prof. L. Hermann <sup>5)</sup>. Helmholtz und Hermann fanden keine Wirkung der Phasen auf die Klangfarbe; König und Lord Kelvin kamen zum

1) Der Fakultät eingereicht im Mai 1902.

2) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen I. Aufl. p. 190 f. 1863.

3) R. König, Quelques Experiences d'Acoustique p. 218 f. Paris 1882; Wied. Ann. 14. p. 369 f. 1881; 57. p. 555. 1896.

4) Lord Kelvin, Proc. of the Roy. Soc. of Edinb. 9. p. 602. 1878.

5) L. Hermann, Pflüger's Arch. 56. p. 467 f. 1894; Wied. Ann. 58. p. 391 f. 1896.

entgegengesetzten Resultat. Schon dieser Gegensatz zeigt, daß es nicht überflüssig ist, die Frage noch einmal wieder aufzunehmen.

Die *historische Entwicklung* ist im näheren kurz folgende:

1. H. v. Helmholtz entschied die Frage des Phaseneinflusses bezüglich der Klangfarbe der Vokale, die er sich durch eine Reihe elektrisch erregter Stimmgabeln mit davorstehenden cylindrischen Resonatoren erzeugte.

Durch Schwächung der Resonanz oder durch direkte Verstimmung der Stimmgabeln wurden die Phasenunterschiede der einzelnen komponierenden Töne eines Vokales geändert und die Klangfarbe in allen Fällen untersucht.

Helmholtz fand, daß die Klangfarbe der Vokale stets die gleiche blieb und schloß so auf die Einflußlosigkeit der Phasen überhaupt.

Hiergegen ist eingewendet worden, daß erstens mit der Phasenänderung eine Tonhöhenänderung Hand in Hand gegangen sei, und daß zweitens die Verallgemeinerung der Resultate der Vokalfrage nicht unbedingt zugegeben zu werden brauche. Immerhin konnte auch durch die beim Umstellen der Apparate verstrichene Zeit eine kleine Klangfarbenänderung der Beobachtung entgehen.

Diese Gründe machten weitere Untersuchungen über den Gegenstand erwünscht.

2. R. König prüfte die Wirkung der Phasen durch seine Wellensirene. Diese hat zur Voraussetzung, daß eine einfache Sinuskurve, wenn sie als Rand einer runden Blechscheibe ausgeschnitten, während deren Rotation angeblasen wird, auch die Luft in einfache Sinusschwingungen versetzt.

König ließ demnach mehrere solcher Scheiben mit verschieden vielen Sinusperioden zugleich um dieselbe Achse rotieren und durch einzelne Spalte anblasen; dann veränderte er die Lage der einzelnen Spalte und dadurch die Phasen zwischen den Tönen.

In dieser Weise ergaben sich beträchtliche Klangunterschiede. Die Gewährleistung für die richtige Deutung dieser Versuchsergebnisse hängt davon ab, ob wirklich die Wellensirene die geforderten Bedingungen genau erfüllt. Hr. Dr. König gibt aber selbst in einer späteren Untersuchung

über die Leistungsfähigkeit der Sirene<sup>1)</sup> zu, daß „die durch Anblasen einfacher Sinuskurven erzeugten Töne bei geringer Intensität und mittlerer Tonhöhe von einer leisen Oktave begleitet seien, bei noch größerer Tiefe auch wohl von einer noch leiseren Duodezime“. Bei sehr großer Intensität waren sogar Obertöne bis zum fünften zu hören.

Ähnliche Ergebnisse haben auch die gleichzeitigen Untersuchungen von Hrn. Prof. C. Stumpf<sup>2)</sup> gehabt.

Eine zweite Methode Königs, die Wellensirene zur Entscheidung der Phasenfrage zu benutzen, bestand darin, daß er Kurven konstruierte, die eine Grundschwingung und bestimmte Reihen von Obertönen mit festgewählten Amplituden- und Phasenverhältnissen darstellten. Wurden auch diese Kurven, jede als Rand einer runden Blechscheibe ausgeschnitten und angeblasen, so gaben sie je nach den darin gewählten Phasenverhältnissen, d. h. je nach der Form der Welle, ganz verschiedene Klangfarben. Hierdurch wird das oben gefundene Resultat bestätigt.

Doch auch hier möchte man zweifeln, ob wirklich die Luft durch die Kurven in genau solche Schwingungen versetzt wird, die der Zahl, den Amplituden und den Phasen der Sinusbestandteile des dargestellten Wellensystems entsprechen.

Sobald beim Rotieren und Anblasen der Blechscheiben auch andere Obertöne als die gewünschten, oder diese mit anderer Amplitude und Phase auftreten, ist die Entscheidung der Phasenfrage durch diese Methode in Zweifel gestellt.

Dieser Einwand scheint in der Tat berechtigt, wenn man die Ergebnisse einiger weiterer Untersuchungen von Hrn. Prof. Stumpf berücksichtigt. Er gibt dort<sup>3)</sup> an, daß er in den Klängen der beiden Kurven Königs, die nur die vier ersten ungeradzahligen Teiltöne erzeugen sollten, auch, zwar schwächer, die drei ersten geradzahligen durch Schwebungen habe nachweisen können. Ferner hätten zwei Kurven, die sich nur durch die Phasen der Komponenten unterscheiden sollten, beim Anblasen schon für das bloße Ohr erkennen lassen, daß die

1) R. König, Wied. Ann. 57. p. 339 f. 1896.

2) C. Stumpf, Wied. Ann. 57. p. 677 f. 1896.

3) C. Stumpf, l. c. p. 678.



relative Intensität der Obertöne in beiden wesentlich verschieden sei.

Demnach hält Hr. Prof. Stumpf die bei der Königschen Methode auftretenden Klangveränderungen für wohl vereinbar mit dem Helmholtzschen Erklärungsprinzip für Klangfarbenunterschiede.

3. An dritter Stelle möchte ich die Untersuchungen von Hrn. Prof. L. Hermann anführen. Er benutzte dazu in erster Linie den neuen Edisonschen *Phonographen*.

Sowohl durch zeitliche Umkehrung des Vorganges (Abszissenumkehr), als auch durch räumliche, d. h. solche, bei der Berg und Tal des aufgezeichneten Kurveineindrucks sich vertauschten (Ordinatenumkehr), veränderte er die Phasenverhältnisse aller auftretenden Klänge gänzlich. Trotzdem blieb die Klangfarbe unverändert erhalten; also ist hier die Phasenfrage wiederum im Sinne der alten v. Helmholtzschen Ergebnisse entschieden. Einwände, wie gegen die früheren Methoden, lassen sich hier nicht machen.

Nur wäre zu sagen, daß diese Versuche die Frage nicht an einem einfachen Falle entscheiden, wo alle Bedingungen klar auf der Hand liegen. Sie benutzen nicht bestimmte Phasenverschiebungen, die zu regeln in unserer Macht läge, sondern wie einmal durch die Abszissen- oder Ordinatenumkehr die Phasen „durcheinander geworfen“ werden (nach Hrn. Prof. Hermanns eigenen Worten), so müssen wir sie hinnehmen, ohne etwa in systematischer Weise den allmählichen Übergang studieren zu können.

Es wäre jetzt nötig, auf alle die Versuche einzugehen, die die Phasen durch die Erscheinungen bei verstimmten Stimmgabelintervallen, namentlich dem der Oktave, entscheiden. Versuche derart sind außer von den bisher genannten Forschern auch von Lord Kelvin angestellt worden. Auf sie werde ich erst in einem zweiten, später folgenden Teile im Zusammenhang mit eigenen diesbezüglichen Untersuchungen eingehen.

Aus dem geschichtlichen Überblick ist zu ersehen, daß die Phasenfrage noch durchaus nicht als endgültig erledigt zu betrachten ist. Wichtig ist, daß sich aus den bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand mit größerer Sicherheit die *Bedingungen* gewinnen lassen, die man für eine exakte, syste-

matische Behandlung der Frage an die dabei verwendete *Tonquelle* stellen muß. Diese muß erstens *in ihren einzelnen Tonbestandteilen nach Zahl und Phasen genau bekannt* sein; zweitens muß man *jede Phasenverschiebung* der Wellensysteme genau zu *kontrollieren* und nach *Belieben direkt herbeizuführen* im stande sein.

Der von mir benutzte Apparat entspricht allen aufgestellten Bedingungen vollkommen; er entstand durch geeignete Abänderungen einer im hiesigen Institut vorhandenen *Weber-Karstensen Telephonsirene*. Auf die Verwendung absolut reiner Töne<sup>1)</sup> wird dabei von vornherein verzichtet, dagegen wird die Intensität der vorhandenen Obertöne in sehr weiten Grenzen variiert.

Dabei zeigt sich, daß große Klangfarbenunterschiede bei den Phasenverschiebungen dann auftreten, wenn gewisse Obertöne in großer Intensität vorhanden sind, daß dagegen mit Verminderung der Intensität dieser Obertöne auch jene Klangfarbenunterschiede geringer werden, um schließlich ganz wegzufallen, wenn entweder gerade jene bestimmten Obertöne nicht in dem Klange enthalten sind, oder überhaupt die Obertöne alle an die Grenze des Verschwindens gebracht worden sind und also angenähert reine Töne zusammenklingen.

Diese Versuche werden an einer großen Zahl von Intervallen und mit vielen Variationen in Bezug auf die Obertöne durchgeführt.

*Die beim Vorhandensein von Obertönen auftretenden Klangunterschiede verschiedener Phasenstellungen werden dabei in allen Fällen als das Resultat gegenseitiger Verstärkung, bezüglich Vernichtung einzelner oder mehrerer beiden Klängen gemeinsamer Obertöne erklärt. Andere Klangfarbenunterschiede, als die so durch Interferenz vorhandener Obertöne erklärlichen, waren niemals zu beobachten.*

#### Apparate.

Die von Dr. L. Weber (jetzt Prof. L. Weber-Kiel) konstruierte und von Prof. Karsten technisch vervollkommnete

1) Es soll hier und im folgenden stets die Terminologie gebraucht werden, daß die Ausdrücke: „einfache Töne, reine Töne, einfache (reine) Sinusschwingungen“, identisch gebraucht werden. Klang wird als Grundton mitsamt Obertönen gefaßt.

Telephonsirene<sup>1)</sup> diene zur Erläuterung der Wirkung des Telephons. Sie besteht aus einer mit kleinen Magneten radial besetzten Messing- oder Pappscheibe, die in Umdrehung versetzt wird, während ein von der Membran befreites Telephon ihrem Rande genähert ist.

Man hört dann in einem zweiten, mit jenem ersten verbundenen Telephon einen Ton, dessen Schwingungszahl sich aus dem Produkt der Umdrehungszahl der Scheibe und der Anzahl der Magnete ergibt. Als Laufapparat diene Gestell und Uhrwerk des Kohlrauschschen Sinusinduktors.<sup>2)</sup>

Ich wählte bei meinen Untersuchungen zwei wesentlich verschiedene Anordnungen der Magnete auf den Scheiben, und zwar ordnete ich sie so, daß sie entweder alle den gleichen Pol nach außen kehrten, oder abwechselnd einen Nord- und einen Südpol. Jene Lage nenne ich die der Gleichpole, diese die der Wechsepole.

Die Gleichpole geben durch ihre Zahl auch die Zahl der Stromstöße während einer Umdrehung der Scheibe. Die Wechsepole dagegen geben nur halb so viele Stromstöße, als ihre Zahl beträgt. Also erhält man hier einen Ton, der die tiefere Oktave von dort ist.

Durch verschieden viele Magnete und durch Änderung der Rotationsgeschwindigkeit lassen sich ziemlich weite Grenzen für die Tonhöhen ziehen.

Statt des membranlosen Telephons verwandte ich fast immer als Stromempfänger Spulen von umsponnenem Kupferdraht, die um einen Kern von ausgeglühten Eisendrähten gewickelt waren. Dies gibt nicht minder starke Töne und man vermeidet dadurch die immerhin recht umfangreichen Bellschen Telephone. Auch macht diese Anordnung den Verlauf der Kraftlinien und Ströme bei Wechsepolen wesentlich übersichtlicher, da sich die unmagnetischen Kerne zu jedem vorbeistreichenden Pole gleich verhalten, während die Magnete der Telephone einmal in ihrem Magnetismus geschwächt, und dann wieder gestärkt werden.

1) G. Karsten, Schriften d. nat. Vereins f. Schleswig-Holstein 3. 2. Heft, p. 27 ff. Kiel 1879.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann., Jubelbd., p. 290 f. 1874.

Mehrere membranlose Telephone oder Spulen mit Kernen verstärken sich offenbar in ihrer Wirkung auf das hörende Telephon, wenn sie gleichzeitig die gleiche Stellung zu den Magnetpolen einnehmen. Daher verwandte ich fast immer vier stromaufnehmende Spulen mit Kernen und verband je zwei zu einem einheitlichen System.

Um ferner die Phase zwischen den ins Telephon gelangenden Tönen jederzeit beliebig ändern zu können, brauchte ich nur das eine Elektromagnetsystem beweglich anzubringen.

Bisher war von Versuchen mit nur einer Scheibe die Rede. Für akustische Untersuchungen wertvoll gestaltet sich der Apparat erst dann, wenn wir zwei Scheiben auf derselben Achse rotieren lassen. So kann durch eine andere und andere Zahl von Magneten auf jeder der Scheiben jedes gewünschte harmonische oder unharmonische Intervall auf der Membrane des hörenden Telephons erregt werden; und durch die Verschiebung des einen Elektromagnetsystems gelingt es, die Phasen der Bestandteile des Intervalles beliebig gegeneinander zu verändern.

Die nötigen Scheiben stellte ich mir aus dünnem Aluminiumblech her. Auf diese wurde mit dem Zirkel die gewünschte Winkelteilung des Kreises eingeritzt und dann die kleinen 3 cm langen prismatischen Stabmagnete mittels Klebwachs radial, in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt, aufgeklebt.

Sobald das Klebwachs erhärtet war, vermochte selbst bei sehr großen Umdrehungsgeschwindigkeiten (50—60 pro sec) die Zentrifugalkraft nicht die Magnete aus ihrer Stellung zu entfernen.

Demnach erhielt *der Hauptteil des Apparates* die in Fig. 1 angegebene Gestalt. Die Uhrwerkteile sind, da sie aus Kohlrauschs Beschreibung seines Sinusinduktors hervorgehen, fortgelassen. Ebenso hätten die Verbindungsdrähte der Spulen untereinander und mit dem Telephon die Zeichnung nur verwirrt; übrigens habe ich im allgemeinen bei Hintereinanderschaltung sämtlicher Apparateile gearbeitet.

Das feste Elektromagnetsystem  $E_1$  befindet sich rechts. Die Kerne der Spulen, bestehend aus 8 cm langen, 0,7 mm dicken, ausgeglühten Eisendrähten, sind durch zylindrische Korke gelassen. Der Spulendraht selbst besteht aus seide-

umsponnenem Kupferdraht von 0,2 mm nackter Drahtdicke; jede Spule trägt ungefähr 1200 Windungen. Die Durchlaßkorke sind auf einem kreisförmig gebogenen Gabelstück von 3 mm dickem Messingdraht verschiebbar angebracht. Das Gabelstück endigt an der Messingröhre  $R$ , die zur Zentrierung des Gabelbogens vor und zurückgezogen werden kann und in dieser Lage festgeschraubt wird. Das ganze System  $E_1$  kann in dem festen Endstück  $A_1$  höher oder niedriger, je nach der Höhe der rotierenden Scheibe, festgeklemmt werden.

Durch diese Anbringung der Elektromagnete ist es mir gelungen, diese ohne jede Mühe sowohl vor oder zurückzuziehen, wie es der jeweilige Durchmesser der Scheiben verlangt, als auch auf dem Gabelbogen seitlich zu verschieben, damit sie in die gewünschte Lage zu den bald dicht, bald weniger dicht stehenden Magneten der Scheiben kommen, ohne etwas von ihrer Radialstellung einzubüßen. Der Kreisbogen des Gabelstückes bleibt natürlich ein für allemal so stehen, daß sein gedachter Mittelpunkt mit dem der rotierenden Scheibe zusammenfällt.

Das bewegliche Elektromagnetsystem  $E_2$  hat seinen Stütz- und Drehpunkt oberhalb des übrigen Apparates, senkrecht über der Achse der rotierenden Scheiben. Ein eisernes Stativ, das mit der Plattform des alten Sinusinduktors fest verschraubt ist, trägt an zwei Armen einen messingenen Halter  $H$  mit dem drehbaren Arme  $A_2$ . In dessen unteres Ende wird der Fuß des zweiten Gabelstückes mit dem Elektromagnetsystem  $E_2$  eingelassen und in der gewünschten Höhe festgeklemmt. Die

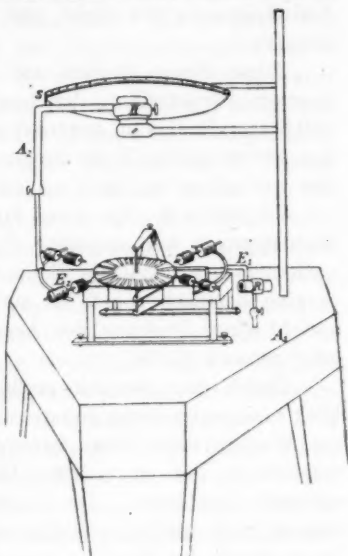


Fig. 1.

Die Telefonsirene.

Elektromagnete sind hier ebenso wie bei dem System  $E_1$  vermittelst je eines Korkes angebracht.

Zum Zwecke genauerer Messungen der Phasenverschiebungen, die durch Drehung des Armes  $A_2$  und damit auch der Elektromagnete  $E_2$  vor der Scheibe hervorgebracht werden, trägt der Arm  $A_2$  noch an seiner Biegung eine feine Nadelspitze  $s$ , die dicht vor einer Millimeterskala entlang streicht.

Diese Skala endlich auf einem genau kreisförmig gebogenen Pappstreifen, der durch eine dicke Pappscheibe von 110,8 mm Radius in zentrischer Lage gehalten wird und mit dem unbeweglichen Teile des Armes  $A_2$ , d. h. mit dem Halter  $H$ , fest verbunden ist, läuft um die ganze Kreisperipherie herum.

Da jedoch der Spielraum für den Arm  $A_2$  und sein Elektromagnetsystem nur ungefähr  $\frac{2}{3}$  Umdrehung betrug, so kam auch nur dieser Teil der Skala für die Messungen in Betracht; er ging demnach von 0 bis 400. Ein Skalenteil (1 mm) entspricht einer Drehung des Armes  $A_2$  um einen halben Grad oder genauer 31,03'.

Durch den ziemlich großen Spielraum des beweglichen Elektromagnetsystems konnte ich bei meinen Untersuchungen die Wellensysteme stets fortschreitend so weit gegeneinander verschieben, daß sie mehrere Male nacheinander alle Phasenzustände durchliefen. Die Gesetzmäßigkeit der Klangveränderungen tritt hierbei offenbar viel sicherer hervor, als wenn die Drehung des Armes  $A_2$  nur so groß wäre, daß die Phasen nur einmal sämtlich durchlaufen würden. In dem Falle könnten Klangveränderungen während der Phasenverschiebung auch in Apparatfehlern ihren Grund haben. Schließlich hatte ich noch einen Stromwender am Apparat angebracht, um jederzeit bequem den Strom eines Elektromagnetsystems umkehren zu können. Da das ganze Stativ des alten Sinusinduktors aus sehr festem, dickem Holz hergestellt ist, so habe ich von etwaigen Erschütterungen der einzelnen Apparateile, und dadurch herbeigeführten Unsicherheiten in den Resultaten nichts zu leiden gehabt. Auch die Befestigung der Elektromagnete durch Korke erwies sich als gut und zweckmäßig.

Durch Versuche wird sich zeigen, daß es von Wichtigkeit ist, auf einer Scheibe nur Magnete von gleicher Polstärke zu

haben, ich verglich daher häufig, gewöhnlich alle drei Tage, die Magnete mit Hülfe eines als Magnetometer benutzten Quinckeschen Spiegelgalvanometers. Die Magnete besaßen prismatische Gestalt; das Verhältnis ihrer rechtwinklig aneinanderstoßenden Kanten war in Centimetern: 3:0,3:0,3. Jeder Magnet wog durchschnittlich 2,2 g. Auf einer 100 cm vom Magnetometer entfernten Skala riefen die Magnete bei einem Abstand von 22 cm von der Magnetometernadel einen Ausschlag von 4,0 bis 7,2 cm hervor. Danach beträgt also für einen Magneten das Moment 20—25 [C.G.S.]-Einheiten. Ich stellte mir im ganzen etwa 100 Magnete her, um jederzeit eine genügende Anzahl gleich starker Magnete zur Verfügung zu haben; denn trotz allen Nachmagnetisierens stellte sich bei jedem Magneten nach einiger Zeit doch eine ihm eigene, konstante Polstärke ein. Mit den so hergestellten Magneten besetzte ich die verschiedenen Aluminiumscheiben, und zwar wählte ich solche mit 3, 4, 5, 6 etc. bis zu 32 Magneten. Der Durchmesser der Scheiben wechselte demnach zwischen 8, 10 und 12 cm. Die Tonhöhen der Grundtöne lagen, der Zahl der Magnete und der Rotationsgeschwindigkeit der Scheiben entsprechend, zwischen 30 und 600 Doppelschwingungen. Dabei betrug die Belastung des Uhrwerkes 5—32 kg. Sehr schön ist beim langsamen Anlaufen des Apparates das allmähliche Übergehen einzelner Stöße in einen zuerst sehr tiefen Ton im Telephone zu beobachten. Als Telephone verwandte ich meistens zwei Siemenssche; sie zeigten sich empfindlicher als die alten von Bell.

#### Grundversuche.

Meine Grundversuche hatten kurz folgende Resultate:

1. Ich hörte bald, daß die durch die Telefonsirene gelieferten Töne nicht rein seien, sondern begleitet von einer Reihe harmonischer Obertöne. Je mehr Magnete sich auf einer Scheibe befanden, und je schneller diese rotierte, umsomehr traten auch die Obertöne an Intensität gegenüber dem Grundtone zurück.<sup>1)</sup>

1) Bei Berücksichtigung dieses Umstandes dürfte kein Widerspruch bestehen zwischen dem obigen und der Angabe Karstens (l. c.), daß die Telefonsirene reine Töne gebe.



2. Stellte ich durch Drehen des beweglichen Elektromagnetsystems Phase  $\frac{1}{2}$  zwischen den in das Telephon gelangenden Wellensystemen her, so erlosch bei Wechseelpolen die ganze Klangmasse, bei Gleichpolen aber trat dann die Oktave stark hervor. Dies führt zur Vermutung, daß dort die Oktave nicht, hier jedoch sehr wohl vorhanden war. Diese sehr wichtige Tatsache wird unten experimentell und theoretisch weiter begründet werden.

Phase  $\frac{1}{2}$  ist bei Wechseelpolen die Stellung, wo die halbe Anzahl der Spulen von Südpolen steht, während die andere Hälfte vor Nordpolen sich befindet, und bei Gleichpolen die, wo die halbe Zahl der Spulen aus der Polgegenüberstellung in die Mitte zwischen zwei Pole verschoben ist.

3. Durch Stromumkehr eines Elektromagnetsystems erlosch sowohl bei Wechseelpolen, wie auch bei Gleichpolen der ganze Klang. Hieraus folgt, wie dies in der Dissertation näher ausgeführt ist, daß die Oberschwingungen des Stromes und damit auch die Obertöne des Klanges nur in Phase 0 oder  $\frac{1}{2}$  zur Grundschwingung bez. zum Grundtone stehen können. Auch dies wird noch weiter untersucht werden. Übrigens haben wir in der Auslöschung der Klänge bei Stromumkehr ein sehr einfaches Mittel gefunden, die Elektromagnetsysteme genau auf Phase 0 zueinander einzustellen. Denn es wird unserem Ohr in allen Fällen viel leichter sein, den Punkt genau zu bestimmen, wo ein Klang gänzlich erlischt, als den, wo alle Bestandteile des Klanges ihre größte Intensität zeigen. Daher habe ich später die Stromumkehr viel zur scharfen Einstellung auf Phase 0 benutzt.

Nach diesen Grundversuchen kam es vor allem darauf an, zu ermitteln, welche Obertöne in jedem einzelnen Falle neben dem Grundton mit erregt wurden. Von etwaigen Eigentönen des Telephons war ich bei meinen Versuchen ganz unabhängig, da ich es durch Veränderung der Magnetzahl und der Rotationsgeschwindigkeit der Scheiben ganz in der Hand hatte, den Versuch in einer bis zu gewissen Grenzen beliebigen Tonhöhe auszuführen.



**Ermittlung der in den Klängen auftretenden Obertöne.**

Die Ermittlung der Obertöne in den Klängen der Telephon-sirene bewerkstelligte ich in folgender einfachen Weise:

Da mein Apparat die Phasenverschiebung direkt gestattete, so habe ich denselben Klang zweimal in allmählich veränderter Phase auf der Membran des Telephons erzeugt. Die beiden Wellensysteme superponieren sich dadurch und nach der jeweiligen Phase erlischt der fragliche Oberton oder tritt stärker hervor. Bei der Verschiebung um eine ganze Phasenperiode wird jeder Teilton von der Teilzahl  $n$  (Grundton als Teilton 1 mitgerechnet) gerade  $n$  mal ausgelöscht und verstärkt. Durch Rechnung läßt sich ferner leicht finden, bei welcher Phasenstellung gerade die Verstärkung, bei welcher die Auslöschung stattfinden muß. Ich fixierte also, während sich beide Elektromagnetsysteme vor derselben Scheibe, und zwar in Phase 0 zueinander befanden, einen bestimmten Oberton im Klange des Telephons, verschob dann das bewegliche System gegen das andere, sodaß sich die beiden gleichen Tonwellen in immer anderer Phase auf der Membran des Telephons superponierten, und zählte, wie viele Male der beobachtete Ton während der Verschiebung um eine ganze Phasenperiode des Grundtones verschwand. Hatte ich so oberflächlich die Existenz des Tones ermittelt, so wiederholte ich den Versuch in der Weise, daß ich nun während der Verschiebung an der Skala die Stellen der Auslöschung des fraglichen Tones ablas und notierte. Die Zahlen müssen zusammen mit den Phase-0-Stellen die durch Rechnung gefundenen Werte ergeben. Das Gebiet der Auslöschung betrug für die einzelnen Obertöne immer mehrere Skalenteile. Die angegebenen Zahlen sind Mittelwerte von je vier Einzelbeobachtungen, die ich so anstellte, daß ich mich der Auslöschungsstelle abwechselnd von der einen oder anderen Seite her näherte.

Aus der größeren Versuchsreihe, die in der Dissertation angegeben ist, sei hier nur ein Beispiel angeführt:

**Scheibe mit 12 Magneten in Wechseipolstellung. Ermittlung des Teiltones 3 (Duodezime).**

Der beobachtete Ton wurde während der Verschiebung um eine ganze Phasenperiode dreimal ausgelöscht, und

zwar ergaben sich als Auslöschungsstellen der Duodezime die Zahlen :

beobachtet	98,5	136,5	174,5	211	253	290,5
berechnet	98,3	136,9	175,5	214,1	252,6	291,2

Phase 0 war beobachtet bei 80, 197, 312.

Also war der gehörte Oberton in der Tat die Duodezime.

In gleicher Weise wurden auch die Versuche bei Gleichpolen ausgeführt. Es sind Obertöne bis zum sechsten und siebenten beobachtet worden; als allgemeines Resultat der ganzen Reihe solcher Versuche hat sich ergeben:

*Die Telefonsirene erzeugt bei gleichliegenden Polen der Scheibenmagnete die ganze Reihe der harmonischen Obertöne, bei Wechseipolen nur die ungeraden Teiltöne.* Je mehr Magnete auf den Scheiben verwandt werden, umsomehr treten die Obertöne gegenüber dem Grundton an Stärke zurück, und zwar geschieht dies schneller bei Gleichpolen, als bei Wechseipolen. Im Falle von 32 Magneten waren für beide Polanordnungen keine Obertöne mehr zu konstatieren.

#### Der Induktionsvorgang.

Bisher habe ich den Vorgang bei der Telefonsirene lediglich nach der akustischen Seite hin betrachtet. Es ist daher jetzt erforderlich, den Verlauf auch nach seiner genetischen Seite zu beschreiben, d. h. durch die Gesetze der elektromagnetischen Induktion zu erklären, wie der Stromverlauf unter den jeweiligen Verhältnissen sich gestaltet, und welche Töne danach zu erwarten sind.

Der einfache Satz, der für diese Betrachtung anzuwenden ist, ist der, daß die induzierte elektromotorische Kraft proportional der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinienzahl ist. Hierbei sei den Kraftlinien eine bestimmte Richtung als positiv zugeschrieben. Man hat also die Gleichung:

$$e = C \cdot \frac{dN}{dt},$$

wo  $N$  = Kraftlinienzahl,  $t$  = Zeit,  $C$  = Proportionalitätsfaktor.

Es mögen sich zunächst *Wechselfole* auf der rotierenden Scheibe befinden und ihnen ein Elektromagnet gegenüberstehen. Dann sieht man leicht

1. die Polgegenüberstellung bewirkt einen Nullwert der elektromotorischen Kraft, weil dort  $N = \text{Maximum}$ ; vor und hinter dem Pole hat  $e$  entgegengesetztes Vorzeichen, denn abnehmende Kraftlinienzahl gibt die umgekehrte Stromrichtung, wie zunehmende, falls die Kraftlinien ihre Richtung behalten.

2. In der Mitte zwischen zwei Polen ist  $dN$  ein Maximum, also auch die elektromotorische Kraft, und zwar einmal ein positives, das andere Mal ein negatives Maximum.

Es ergibt sich hier insgesamt für die elektromotorische Kraft das nebenstehende Bild (Fig. 2).

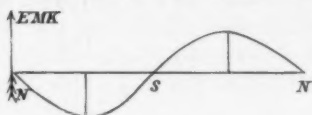


Fig. 2.

Daß der Verlauf der elektromotorischen Kraft rein sinusförmig vor sich geht, ist von vornherein nicht anzunehmen; das Gegenteil haben auch schon die mit dem Grundton auftretenden Obertöne bewiesen. Es lassen sich aber, wenn man die durch den Verlauf der Kraftlinien bedingten Symmetrieverhältnisse ins Auge faßt, einige Schlüsse auf die möglichen Oberschwingungen machen, in welche die ganze Schwingungsform des Stromes sich zerlegt denken läßt.

Nimmt man an, daß auf einer Scheibe nur Magnete von gleicher Polstärke verwendet sind, und daß diese beim Rotieren alle gleichen Abstand vom Elektromagneten haben, so zeigt eine einfache Betrachtung des Kraftlinienverlaufes, daß die Kurve der elektromotorischen Kraft in der Mitte zwischen  $N$  und  $S$ , wie auch zwischen  $S$  und  $N$  symmetrisch sein muß, und ferner, daß sie an den Polen selbst symmetrisch mit Vertauschung von oben und unten ist.

Die erste Art der Achsen nennen wir einfach Symmetriechsen, die zweite Art Umklappungs-Symmetriechsen. Diese Achsen müssen auch von allen möglichen Partialschwingungen erfüllt werden.

Demnach gelten folgende Schlüsse, die in der Dissertation ausführlicher mathematisch behandelt sind:

I. Alle Partialschwingungen müssen in Phase 0 oder in Phase  $\frac{1}{2}$  zur Grundschiwingung gedacht werden, da sie sonst die Umklappungs-Symmetrieachse nicht befriedigen würden. Derselbe Schluß hatte sich schon aus dem Stromumkehrversuch ergeben.

II. Die Oktave und ebenso alle übrigen geradzahligcn Oberschwingungen können von den Wechseipolen nicht mit erregt werden, da sie gegen die eigentlichen Symmetrieachsen verstoßen würden. Auch dies war schon bei den Versuchen hervorgetreten.

Ganz ähnlich gestalten sich die Verhältnisse bei Gleichpolscheiben. Auch hier sind die Polstellen absolute Nullwerte der elektromotorischen Kraft, und zwar geht hier die Kurve bei jedem Pol in gleicher Richtung durch die Gleichgewichtslage.

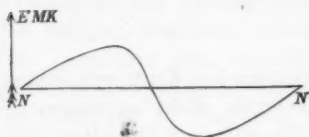


Fig. 3.

Da nun in der Mitte zwischen zwei Polen in dem Falle der Gleichpole die Änderung der hier immer gleichgerichteten Kraftlinien Null ist, so muß auch dort eine Nullstelle der Kurve angenommen werden. Der

Vorzeichenwechsel erfolgt hier in umgekehrter Richtung, wie an den Polen; wir erhalten insgesamt das vorstehende Bild (Fig. 3).

In Bezug auf die Symmetrieverhältnisse dieser Kurve ergibt sich der Unterschied gegen vorhin, daß hier gar keine eigentliche Symmetrieachse zu existieren braucht.

Es ist sogar, wie man sich durch die Zeichnung der Kraftlinien leicht überzeugen kann, unwahrscheinlich, daß die Änderung derselben vom Pol bis zur Mitte zwischen zwei Polen symmetrisch an- und absteigt. Das Fehlen dieser Symmetrieachse hat zur Folge, daß in diesem Falle sehr wohl die geradzahligcn Oberschwingungen auftreten können; eine Tatsache, die durch die Beobachtungen schon festgestellt war.

Die Umklappungs-Symmetrieachsen, die sich bei Gleichpolscheiben an den Polen und in der Mitte dazwischen befinden, bedingen auch hier die oben angegebene Phasenbeschränkung.

Es werde im Anschluß hieran kurz der Fall behandelt, daß wir bei Wechseipolen die Voraussetzung der gleichen Pol-

in  
ast  
en.  
ch  
  
ren  
mit  
en  
en  
  
ch-  
rte  
rve  
ta-  
wi-  
lle  
der  
ten  
uß  
der  
Der  
wie  
Bild  
  
rve  
ine  
  
aft-  
de-  
len  
rie-  
ad-  
che,  
  
pol-  
ten,  
ing.  
elt,  
Pol-